

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE

Facoltà di Economia e Commercio

Tesi di dottorato di ricerca in
Storia delle Dottrine economiche

Febbraio 1993

L'INTRODUZIONE DELLA TEORIA DEI GIOCHI

NELL'ECONOMIA DALLE ORIGINI AL 1959

di

ALESSANDRO INNOCENTI

INDICE

1. INTRODUZIONE	pag. 3
1.1 Breve discorso sul metodo	" 3
1.2 Quale storia della teoria dei giochi?	" 5
2. L'INTERAZIONE STRATEGICA IN ECONOMIA PRIMA DEL 1944	" 9
2.1 Introduzione	" 9
2.2 La teoria del duopolio: la funzione di reazione	" 12
2.3 La teoria del duopolio: la variazione congetturale	" 15
2.4 La teoria del duopolio: la competizione spaziale	" 18
2.5 La teoria della concorrenza monopolistica	" 21
2.6 La teoria della contrattazione	" 24
3. LA TEORIA DEI GIOCHI MATEMATICA PRIMA DEL 1944	" 30
3.1 Il contributo di Bernoulli alla teoria dell'utilità	" 30
3.2 I precursori matematici della teoria dei giochi	" 31
3.3 La teoria dei giochi di Émile Borel	" 35
3.4 Economia e matematica all'inizio del '900: un rapporto difficile	" 38
3.5 La nascita della teoria dei giochi matematica: l'articolo del 1928 di von Neumann	" 40
3.6 La collaborazione tra John von Neumann e Oskar Morgenstern (1928-1944)	" 43
4. THEORY OF GAMES AND ECONOMIC BEHAVIOR	" 49
4.1 La metodologia	" 49
4.2 La teoria dell'utilità	" 52
4.3 La teoria dei giochi matematica	" 55
4.4 I modelli economici	" 62
4.5 La diffusione iniziale tra gli economisti	" 66
4.6 La fortuna critica in Italia	" 72
5. LA TEORIA DEI GIOCHI E L'ECONOMIA TRA IL 1944 E IL 1959	" 76
5.1 La comunità scientifica	" 76
5.2 Gli sviluppi matematici della teoria dei giochi	" 79
5.3 L'analisi dei mercati imperfetti	" 90
5.4 I modelli di monopolio bilaterale	" 96
5.5 L'equilibrio economico generale e il 'core'	" 101
5.6 La teoria della decisione	" 105
5.7 I giochi sperimentali e i 'business games'	" 109
BIBLIOGRAFIA	" 112
NOTE	" 151

1. INTRODUZIONE

1.1 Breve discorso sul metodo

"Knowledge is constructed, not found.
History is not found; history is written"
(E. R. Weintraub)

L'intento di questo lavoro è di ricostruire l'evoluzione storica dalle origini fino al 1959 delle relazioni tra uno strumento matematico di recente fondazione, la teoria dei giochi, e la scienza economica. Prima di affrontarne l'esposizione è però utile premettere, per esigenze di chiarezza intellettuale, un breve cenno all'impostazione metodologica adottata.

La scelta di uno 'stile' storico tra i tanti proposti in letteratura rappresenta sempre un compito gravoso; la soluzione di questo problema può essere affrontata più agevolmente se prima si dispone di una più generale concezione della scienza e dei modi con cui si sviluppa. La teoria a cui si intende fare riferimento in questo lavoro è quella definita da Imre Lakatos e dalla sua idea di 'research programme'¹. Secondo Lakatos, il punto di partenza del lavoro di ogni scienziato è costituito dall''hard core', che comprende quei principi che egli ritiene indiscutibili all'interno del suo programma di ricerca. Questi nuclei di idee, originati spesso in modo intuitivo, rappresentano la lente che permette allo scienziato di discriminare, tra tutte le osservazioni empiriche che egli compie, quelle che diventano rilevanti per la sua teoria. Solo alle altre componenti del suo programma di ricerca, che Lakatos raccoglie sotto il termine di 'protective belt', lo scienziato indirizzerà i successivi test di verifica empirica della teoria. Se questi ultimi vengono superati allora la teoria, in base al principio di falsificazionismo popperiano, può essere considerata accettabile. Una concezione di questo tipo rappresenta la conoscenza come un processo dinamico, rispetto al quale non deve ingannare la fissità dell'hard-core: essa è imposta dalla limitatezza dei mezzi con cui l'individuo interpreta la realtà circostante, dall'enorme complessità di quest'ultima e dalla necessità di fissare dei fondamenti alla sua ricerca di dati empirici.

Un metodo di storia del pensiero economico che faccia proprie queste premesse deve proporsi di superare alcuni dei criteri seguiti fino ad oggi. Adottando la classificazione proposta da Fisher in *The Logic of Economic Discovery*², una prima impostazione è quella trasversale. Gli storici che adottano questo metodo esaminano il passato secondo la logica dei precursori, interpretando le teorie più recenti come elementi finali di un percorso necessario e inevitabile. Ma questo approccio si presta ad almeno due critiche: esso distorce il passato, evitando la ricerca dei meccanismi propri di ogni singolo processo conoscitivo³, ed ignora, inoltre, i programmi di ricerca subalterni a quelli dominanti che rappresentano comunque un elemento dell'ambiente in cui si formano le teorie. Una storia del pensiero di questo tipo ha un fine che tradisce la sua stessa natura:

Orthodoxy may or may not ignore heterodoxy, but the history of economic thought ought not be written with the perspective of orthodoxy's version of progress from error to truth. History should not be written to cast

luster on the present; while it is so written, it becomes essentially apologetics⁴.

Una concezione che si oppone nettamente a quella trasversale viene adottata dallo storico inglese Mark Blaug. Nei suoi scritti, la narrazione procede per successive confutazioni: ogni teoria si sostituisce traumaticamente alla precedente in una successione scandita temporalmente. Questa ipotesi di lavoro, definibile come falsificazionista, trascura a sua volta un elemento fondamentale dello sviluppo del pensiero economico. In economia, infatti, non sembra essersi mai verificata una rivoluzione in senso 'catastrofico'⁵, come intesa dalla filosofia della conoscenza di Kuhn⁶. Più che ribaltare l'universo teorico precedente, ogni nuovo progetto di ricerca, incluso il processo di introduzione della teoria dei giochi nell'economia, incorpora congetture ed ipotesi già conosciute da un lungo periodo di tempo:

In economic phenomena, a new theory need not refer to a set of substantively novel hypothesis and conjectures; it is, in fact, more likely to refer to a new mathematical language applied to old subject matter. A very great proportion of what economists consider theoretical work - or work in so-called pure theory - concerns the exploration of the potentialities of formal languages for ordering perceived economic realities⁷.

Un terzo criterio, quello funzionalista proposto da Marx e da Weber, sostiene invece che la comprensione di una teoria scientifica deve basarsi sull'individuazione del suo ruolo nella società. Questo tipo di storia del pensiero si contrappone a quella psicologica, che privilegia lo studio delle caratteristiche individuali dello scienziato a quello degli stessi contenuti della sua teoria. Entrambe queste due impostazioni presentano il difetto di non cogliere nella sua globalità quel processo che Schumpeter ha definito di filiazione delle idee scientifiche⁸. La razionalità scientifica non è un processo né solo individuale, né solo sociale. Esso si origina sulla base di letture individuali del mondo circostante, che partono sempre da modelli incompiuti e parziali. Questi modelli devono la loro struttura alle caratteristiche dell'individuo che li crea e che riversa in essi i propri interessi e le proprie caratteristiche. Ma essi sono, nello stesso momento, il risultato di un'interazione collettiva. Lo scienziato elabora le proprie idee esposto all'influenza del contesto in cui opera ed ogni teoria scientifica è conoscenza condivisa da una comunità di studiosi. Sono inoltre questi fattori esterni alle volontà dei singoli a definire sia gli interessi socialmente rilevanti che gli sviluppi teorici predominanti. Non è quindi possibile comprendere perché una certa dottrina sia stata formulata e si sia affermata senza avere analizzato questo duplice aspetto, individuale e sociale, del lavoro scientifico⁹.

Esiste infine un ultimo approccio, quello narrativo, che privilegia la consequenzialità logica dei fatti o delle idee rispetto ad una loro più profonda comprensione. Il pericolo principale è, in questo caso, quello di rendere il lavoro dello storico privo di un progetto esplicito e quindi spesso contraddittorio e inconcludente.

La concezione di storia del pensiero economico a cui questo studio intende ispirarsi si fonda sulla convinzione che non esistono rivoluzioni in senso kuhniano nella conoscenza scientifica: il progresso è permesso solo dalla continua interazione dialettica tra teorie alternative. A questo proposito, Lakatos definisce progressivi quei programmi di ricerca

che accrescono il potere interpretativo della disciplina e degeneranti quelli che non condividono questa caratteristica. Un primo obiettivo di questo lavoro sarà quindi quello di definire in quale modo la teoria dei giochi ha permesso di ampliare la portata empirica della scienza economica.

Altrettanto importante viene considerata l'idea che la conoscenza scientifica possa progredire solo all'interno di comunità di studiosi e di gruppi sociali organizzati, che diventano interpreti privilegiati delle singole teorie. Facendo nuovamente ricorso alla terminologia lakatosiana, un programma di ricerca può essere considerato progressivo anche se riesce ad attrarre una proporzione crescente degli interpreti di una certa disciplina. La storia che segue vuole quindi essere sia un resoconto dell'evoluzione dell'analisi economica che della professione di economista.

E' necessario infine riaffermare che la conoscenza è un processo dall'andamento complesso, che non ha né fini predeterminati né ordine univoco. Pur accettando il principio di accumulazione delle scoperte, la narrazione storica deve adottare una logica di prospettiva in grado di cogliere gli elementi comuni anche tra approcci temporalmente distanti, ma che ne salvaguardi contemporaneamente la specificità.

La realizzazione del progetto appena delineato ha imposto un'attenzione maggiore alle determinanti teoriche e a quelle umane e sociali dell'evoluzione descritta piuttosto che alla discussione degli elementi matematico-formali. Si è infatti cercato di approfondire le implicazioni di carattere concettuale che la teoria dei giochi ha comportato per il patrimonio di idee dell'economista. Nello stesso tempo è stato dedicato un ampio spazio alla ricostruzione dei percorsi di ricerca dei maggiori interpreti di questa evoluzione ed alle dinamiche con cui questi singoli contributi hanno interagito fra di loro. La discussione dei particolari matematico-formali delle teorie presentate, di indubbia importanza nella storia di uno strumento matematico come la teoria dei giochi, era peraltro al di là dei limiti imposti a questo lavoro. Ci si è quindi limitati a presentarne quelle parti che sono state giudicate assolutamente indispensabili. Una conoscenza approfondita degli strumenti con cui la teoria dei giochi è stata originariamente formulata è perciò rinviata alla consultazione della letteratura citata nella bibliografia finale.

1.2 Quale storia della teoria dei giochi?

Applicare i principi appena delineati è un compito più impegnativo quando l'argomento trattato non è ancora stato oggetto di pubblicazioni che ne tratteggino l'evoluzione complessiva. A oltre quaranta anni dalla pubblicazione del libro fondamentale di von Neumann e Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, non è ancora infatti stata scritta una ricostruzione storica, completa e dettagliata, delle relazioni della teoria dei giochi con l'economia.

L'assenza di analisi puramente storiche dell'ampia letteratura economica che applica la teoria dei giochi può essere attribuita, almeno in parte, al fatto che essa si sviluppa all'interno della comunità scientifica statunitense, che è composta da studiosi solitamente restii a dedicarsi alla storia del pensiero economico, disciplina che non può ancora vantare in quel paese un ruolo accademico importante.

Un altro motivo, di natura teorica, di questo ritardo è che gli storici del pensiero economico hanno adottato solo raramente una visione unitaria delle relazioni tra l'economia e la teoria dei giochi. I loro contributi si sono basati sull'analisi di una disciplina che può essere definita come 'teoria dei giochi economica', alla quale è stata assegnata un'identità autonoma rispetto ad altri settori dell'analisi economica. Questa divisione artificiale ha condizionato gli storici del pensiero che hanno limitato la valutazione degli effetti del nuovo strumento matematico solo a quelle aree tematiche che devono ad esso la propria fondazione o che l'hanno adottata come strumento analitico principale¹⁰.

Questo lavoro si propone di affrontare lo studio degli effetti della teoria dei giochi rovesciando questa struttura logico-descrittiva. In luogo della 'teoria dei giochi economica' è necessario analizzare tutti gli effetti di carattere teorico ed applicativo che il nuovo apparato matematico ha avuto sull'analisi economica. Fin dalla sua comparsa, la teoria dei giochi è stata "a major innovation in applied mathematics, an invention of a mathematical system outstandingly germane to specifically human affairs, involving rational choice"¹¹, che integrando, e in parte superando, la strumentazione matematica dell'economista ha provocato, oltre alla nascita di nuovi settori di ricerca, ampie modificazioni nell'analisi che l'ha preceduta.

Un'analogia storica può rendere più chiaro il significato di questa affermazione. Come l'analisi differenziale rappresentò lo strumento con cui l'economia matematica di Cournot, Jevons e Walras, sostituendosi all'analisi letteraria di matrice smithiana, riuscì a approfondire la comprensione di molte questioni economiche, così la teoria dei giochi è stata il mezzo che ha permesso una diversa e più completa descrizione del comportamento umano. La teoria economica precedente aveva dovuto assumere restrizioni irrealistiche od evitare predizioni accurate laddove l'analisi abbandonava il caso idealistico definito alla 'Robinson Crusoe', nel quale il singolo individuo, unico fattore attivo del suo status economico, non teneva conto, nel fare le proprie scelte, né dell'effetto che esse avevano sulle scelte degli altri né dell'effetto che le scelte degli altri avevano sulle proprie. La teoria dei giochi ha invece consentito la fondazione di un nuovo apparato analitico in cui le azioni di ogni individuo possono essere descritte come dipendenti, sia direttamente che indirettamente, dal comportamento degli altri individui. Ha inoltre permesso di dimostrare che questo elemento, l'interazione strategica, pervade tutti i diversi ambiti di ricerca di una scienza sociale come l'economia.

La teoria dei giochi può allora essere definita uno strumento di matematica applicata creato per lo studio delle strutture sociali e che avuto nell'economia le sue più importanti applicazioni. Essa ha provocato la modificazione di alcune caratteristiche dell'analisi economica ed ha introdotto importanti innovazioni:

a) Mutamento di alcune caratteristiche dell'analisi economica

1) il concetto di razionalità dell'agente economico è stato ridefinito includendo in esso sia l'informazione che l'interazione strategica: "the New Economic Man is aware of his neighbour."¹²;

2) la metodologia economica è diventata più rigorosa, in linea con lo 'standard of modesty' adottato dai fondatori della teoria dei giochi: essa deve proporsi in primo luogo di ottenere precisione in ambiti limitati, procedendo, solo dopo, ad analisi più ampie¹³;

3) sono stati introdotti nell'economia gli strumenti della logica e della matematica moderna¹⁴;

- 4) l'interdisciplinarietà ha assunto il ruolo di requisito fondamentale dell'analisi economica;
- 5) l'analisi dei mercati si è integrata con quella delle condizioni informative degli agenti economici.

B) Innovazioni introdotte nell'analisi economica

- 1) analisi degli effetti dell'interazione strategica, che si differenzia dal conflitto perché "always there is exhibited an endless chain of reciprocally conjectural reactions and counter-reactions."¹⁵;
- 2) costruzione di modelli matematici che descrivono il ruolo dell'informazione nel comportamento economico;
- 3) inclusione nei modelli economici di più variabili decisionali;
- 4) fondazione di una teoria dell'apprendimento degli agenti economici;
- 5) creazione di nuovi strumenti applicativi.

La ricostruzione dell'evoluzione storica dei rapporti tra economia e teoria dei giochi deve perciò adottare un approccio diverso rispetto a quello seguito fino ad oggi dagli storici del pensiero. Volendolo contenere nei limiti imposti a questo lavoro, è stato necessario limitarsi a trattare solo una parte di questa pur recente evoluzione; tanto più che anche una frettolosa rassegna della letteratura economica rivela il grande numero di contributi che si sono accumulati negli ultimi cinquanta anni.

Il punto di partenza per la scelta del periodo da analizzare è stato la voce 'Game Theory' curata da Robert Aumann per The New Palgrave of Economics. Aumann, tracciando un sintetico profilo della storia della teoria dei giochi, afferma:

The 1950's were a period of excitement in game theory. The discipline had broken out of its cocoon, and was testing its wings. Giants walked the earth. (...) And in 1959 came Shubik's spectacular rediscovery of the core of a market in the writings of F. Y. Edgeworth (1881). From that time on, economics has remained by far the largest area of application of game theory¹⁶.

Secondo Aumann, il periodo di incubazione della teoria dei giochi è quello precedente al 1959, trascorso il quale prende definitivamente forma la sua introduzione nell'economia. Nel frattempo vengono però definiti molti degli strumenti matematici che riceveranno successivamente larga applicazione¹⁷. Questa contraddizione, che è stata oggetto di interpretazioni anche contrastanti tra loro, è sembrata un oggetto di studio particolarmente interessante. Per approfondirne i motivi si è cercato di seguire due linee di ricerca: in primo luogo, individuarne le cause contenute nell'evoluzione finale del periodo considerato, quello che si estende dall'anno di pubblicazione di Theory of Games and Economic Behavior fino al 1959; determinando, inoltre, quali contributi dell'analisi economica e matematica precedenti al 1944 possono rappresentare un elemento di continuità con il successivo sviluppo delle applicazioni economiche della teoria dei giochi.

Tra i motivi che emergeranno dalle pagine seguenti, uno appare particolarmente importante: la netta separazione che si crea in quegli anni tra la professione economica e gli studiosi della teoria dei giochi. E' storicamente evidente che la nascita del nuovo metodo d'analisi fu dovuta principalmente a un insieme di matematici, che presentarono i loro risultati attraverso un linguaggio complesso, senza rinunciare mai ad un assoluto rigore formale. Per gli economisti questa scelta rappresentò un

ostacolo spesso insuperabile, che ha rinviato per molto tempo l'impiego esteso della teoria dei giochi in economia.

La descrizione della nascita di questa nuova comunità scientifica rappresenta quindi uno degli obiettivi di questo lavoro. Il ruolo svolto dalle due principali strutture di ricerca economica e matematica esistenti negli Stati Uniti negli anni '50, la Cowles Commission e la RAND Corporation, è infatti un elemento fondamentale dell'importante risultato raggiunto: la fondazione di un nuovo apparato metodologico che ha cambiato il volto di tutte le scienze sociali contemporanee.

Nonostante questa premessa è necessario sottolineare che quei risultati furono permessi da un processo di 'filiazione delle idee', che percorre sia la storia del pensiero matematico che quella del pensiero economico. Nel primo ambito rientrano i contributi che cercarono nel '700-'800 di spiegare attraverso la matematica i comportamenti dei giocatori d'azzardo e le opere che all'inizio di questo secolo colsero per prime l'analogia tra i giochi e l'economia. Nell'economia, la ricerca dei precursori della nuova teoria conduce fino alle Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses di Augustine Cournot, che rappresentano il primo tentativo di descrivere attraverso la matematica una situazione di interazione strategica, e prosegue con un insieme di contributi che, tra la fine dell'800 e l'inizio del '900, consentono lo sviluppo della teoria del comportamento razionale dell'agente economico. La discussione di questa letteratura renderà evidente che, come sostiene Lakatos, un'innovazione apparentemente 'rivoluzionaria' come la teoria dei giochi fonda le proprie radici in un solido retroterra scientifico che l'analisi storica si deve proporre di ricostruire.

2. L'INTERAZIONE STRATEGICA IN ECONOMIA PRIMA DEL 1944

2.1 Introduzione

Nella concezione metodologica di Lakatos, l'esame dei precursori di un certo programma di ricerca deve basarsi sulla comprensione di quale sia il suo 'hard core'. In questo nucleo di idee che caratterizzano ogni approccio scientifico tendono infatti a sedimentarsi i contributi più rilevanti della teoria precedente¹⁸. Nel caso di uno strumento matematico come la teoria dei giochi, questa sintesi non è un compito semplice poichè essa ha teso ad assumere le caratteristiche delle varie discipline a cui è stata applicata.

In economia, la teoria dei giochi, oltre ad avere adottato l''economic principle' corrispondente all'affermazione che "when an opportunity for gain presents itself it will be taken"¹⁹, si è caratterizzata per avere descritto in modo originale il comportamento dell'agente economico. Il principale problema che la teoria dei giochi si propone di rendere matematicamente trattabile è quello dell'interazione strategica. Nei modelli economici, gli individui devono sempre prendere delle decisioni e compiere delle azioni. Le conseguenze di questi comportamenti, determinati dalla libera volontà dei soggetti, dipendono dalle caratteristiche dell'ambiente in cui si attuano. L'interazione strategica fa la sua comparsa ogni volta che queste caratteristiche dipendono, oltre che da parametri esogeni raffiguranti gli elementi invarianti del modello, anche dalle libere scelte di altri soggetti. Anche se esistono situazioni in cui non è necessario tenere conto di questo elemento²⁰, questo fenomeno è presente in gran parte dei contesti in cui l'agente economico effettua le sue scelte e, in particolar modo, nella teoria dell'impresa.

L'analisi neoclassica di fine ottocento evita di affrontare questo problema. Marshall²¹, adottando lo strumento dell'analisi parziale, fonda i suoi risultati sull'ipotesi di 'ceteris paribus', assumendo come fissi sia la struttura dell'ambiente esterno all'agente economico che i comportamenti degli altri soggetti; inoltre egli non affronta direttamente la teoria dell'impresa, concentrandosi invece sull'analisi del concetto di industria.

Il concetto di economia inter-industriale viene affrontato dalla discussione sui rendimenti decrescenti di Sraffa, ma perché le critiche di quest'ultimo si traducano in una teoria specifica è necessario attendere nel '900 l'opera di Chamberlin.

La scuola neoclassica di Losanna (Walras e Pareto) affronta l'analisi del comportamento dell'impresa inserendola in un modello di equilibrio generale, ma anch'essa ignora il problema dell'interazione strategica ricorrendo a ipotesi semplificatrici. Sia l'artificiosa invenzione della figura del banditore che l'adozione del processo di 'tâtonnement'²² permettono di relegare l'agente economico al ruolo di soggetto passivo, i cui comportamenti dipendono da un unico soggetto attivo impersonale, il sistema dei prezzi.

Una chiara definizione del significato di questi espedienti teorici è contenuta proprio nel libro che fonda la teoria dei giochi, *Theory of Games and Economic Behavior*²³. Secondo von Neumann e Morgenstern, la rappresentazione di Pareto e di Walras adotta un modello di comportamento dell'individuo che può essere definito alla Robinson Crusoe. Ogni singolo agente economico massimizza autonomamente la propria soddisfazione

risolvendo un sistema di equazioni, nel quale tutti i parametri hanno valori fissi e l'unica variabile è determinata dalla sua volontà. In un mercato di concorrenza perfetta ogni impresa, non essendo in grado di influenzare il prezzo di mercato, può allora considerare fisso quest'ultimo e stabilire la produzione al livello che massimizza i suoi profitti. In monopolio, con una procedura simile, considerando come parametri la curva di domanda e quella di costo, è il prezzo che massimizza i profitti ad essere il risultato del calcolo del monopolista.

Il tentativo di analizzare il fenomeno dell'interazione strategica viene avviato proprio col superamento della dicotomia concorrenza perfetta/monopolio. Quando un mercato è formato da almeno due imprese, le ipotesi del modello alla Robinson Crusoe diventano inapplicabili. Il singolo imprenditore non è più libero di massimizzare autonomamente il profitto, perché questo risultato dipende non solo da parametri dati ma anche da un'altra variabile sottratta al suo controllo, le decisioni dell'altro duopolista²⁴.

I primi modelli strategici di duopolio presentati in letteratura ricorrono a due concetti fondati sui metodi dell'analisi differenziale²⁵: la funzione di reazione e la variazione congetturale. Il primo strumento consente di determinare il livello di produzione che massimizza il profitto di un'impresa in funzione del prodotto della concorrente.

Considerando un semplice modello di duopolio, in cui ad un'industria composta da due imprese si rivolge una funzione di domanda lineare $x = A - P$ (con x quantità prodotta totale, P prezzo e A costante), il livello di produzione dell'impresa 1 che massimizza i suoi profitti, x_1^* , dipende dalla quantità prodotta dall'impresa 2, x_2 . Ipotizzando costi nulli, il profitto dell'impresa 1 è dato da $x_1 \cdot P = x_1 \cdot (A - x_2 - x_1)$, che raggiunge il suo valore massimo, differenziando rispetto a x_1 e uguagliando a 0, per:

$$x_1^*(x_2) = (A - x_2) / 2$$

Questa espressione rappresenta la funzione di reazione con cui l'impresa 1, in funzione della quantità prodotta dall'impresa 2, massimizza i suoi profitti. La funzione di reazione dell'impresa 2 è ovviamente:

$$x_2^*(x_1) = (A - x_1) / 2$$

Il secondo concetto impiegato per descrivere una situazione di interazione strategica, la variazione congetturale, introduce, rispetto alla funzione di reazione, un ulteriore elemento di incertezza. L'impresa 1 non considera più la quantità prodotta dall'impresa 2 come costante, ma ritiene che il concorrente reagirà in qualche modo alle sue decisioni. La stima fatta dall'impresa 1 sulle modalità di questa reazione viene rappresentata attraverso una generica funzione $x_2 = x_2^*(x_1)$, definita come la variazione congetturale di 2 sulla funzione di reazione del rivale. Il profitto (o ricavo) che l'impresa 1 tende a massimizzare è allora espresso da:

$$[A - x_1 - x_2^*(x_1)] \cdot x_1$$

Anche l'impresa 2 farà un'analogha stima sulla variazione congetturale di 1, $x_1 = x_1^*(x_2)$, ed il suo profitto corrisponde a:

$$[A - x_2 - x_1^*(x_2)] \cdot x_2$$

In questo modo i livelli produttivi ottimali dipendono dalla forma delle funzioni di variazioni congetturali di entrambe le imprese.

Tutti i modelli di duopolio presentati prima della nascita della teoria dei giochi adottano questi due strumenti. I contributi di Cournot, Bertrand, Edgeworth e Hotelling si limitano ad impiegare il concetto di funzione di reazione; quelli, successivi, di Bowley, von Stackelberg, Smithies e Savage e Coase introducono l'ipotesi di variazione congetturale.

I risultati raggiunti da questi autori sono però criticabili per la rigidità delle loro assunzioni di comportamento dell'agente economico. La funzione di reazione definisce le condizioni di equilibrio del modello considerando irrealisticamente come invarianti le azioni del concorrente. L'applicazione dell'ipotesi di variazione congetturale non riesce a risolvere il problema della stima del comportamento dell'avversario; questo processo di reazione reciproca è infatti illimitato ed ogni stima della funzione che lo determina è inevitabilmente arbitraria.

La descrizione di questi contributi appare comunque importante perché evidenziano il problema empirico a cui tenta di trovare una soluzione la teoria dei giochi. Ad essi è attribuibile non solo il merito di avere rappresentato il contesto iniziale di analisi dell'interazione strategica, ma anche quello di avere rivelato l'inadeguatezza dell'analisi economica rispetto a questo problema.

Un altro contributo importante della teoria del duopolio è l'affermarsi di una diversa sensibilità nell'uso dello strumento matematico. L'idea, proposta per la prima volta da Cournot²⁶ e fatta propria anche dalla teoria dei giochi, che l'approccio matematico sia la via per la fondazione di una scienza dell'economia, viene portata avanti da Harold Hotelling, che presenta nel 1929 un innovativo modello di competizione spaziale. Lo studio delle condizioni di locazione ottimale viene affrontato da Hotelling considerando l'interdipendenza delle imprese come un elemento determinante. Indipendentemente dai risultati che egli raggiunge, la chiarezza di quella discussione influenza gli sviluppi successivi. L'articolo di Hotelling contiene anche un'altra intuizione: ogni differenza nella qualità del prodotto e ogni altra variabile della decisione dell'impresa può essere descritta mediante valori numerici e inserita quindi in un modello matematico.

L'analisi dell'interazione strategica viene affrontata negli anni trenta anche dagli studiosi dei mercati oligopolistici. La teoria della concorrenza monopolistica di Chamberlin cerca di descrivere matematicamente l'interdipendenza tra le imprese, ma egli raggiunge risultati meno chiari della teoria del duopolio. Il suo contributo e quello, contemporaneo, di Joan Robinson, pur superando l'ipotesi di concorrenza perfetta, non abbandonano gli strumenti dell'economia neoclassica. Assegnando solo alla curva di domanda il compito di distinguere i vari tipi di mercato, essi evitano di analizzare le relazioni strategiche tra le imprese. Quest'ambito di riflessione teorica ha però un altro merito: esso introduce nuove variabili nei modelli di economia industriale. Il comportamento delle imprese inizia a dipendere non solo dalle funzioni di costo e di domanda, ma anche da fattori di imitazione, dalle condizioni informative, dalla pubblicità e dalla libertà di entrata di nuovi concorrenti. L'analisi di Chamberlin, e in parte anche quella di Triffin, dimostrano che a questo allargamento delle variabili rilevanti corrisponde una maggiore rilevanza

dell'interdipendenza strategica tra le imprese, non più sintetizzabile con gli strumenti dell'economia neoclassica.

L'ultimo settore di analisi economica che anticipa i contenuti della teoria dei giochi è quello che studia il processo di contrattazione. Negli anni '30, Zeuthen offre una descrizione del processo di negoziazione dei salari che presenta molti punti in comune con la soluzione di John Nash al 'bargaining problem'. Prima di lui, Edgeworth costruisce un modello di contrattazione di fondamentale importanza per l'intera analisi economica. Egli riesce infatti a determinare l'equilibrio di mercato non in funzione di un fattore impersonale come il sistema dei prezzi, come avveniva nel modello di Walras, ma fondandolo sulla volontà individuale che assume il ruolo di unica determinante del processo di scambio. Per questa sua costruzione teorica, Edgeworth può essere considerato il principale ispiratore non solo del concetto di soluzione di von Neumann e Morgenstern per i giochi cooperativi a n persone, ma anche dell'intero progetto teorico degli autori di Theory of Games and Economic Behavior.

2.2 La teoria del duopolio: la funzione di reazione

Il primo economista ad essere cosciente del problema dell'interazione strategica in un mercato di duopolio è Augustin Cournot. Nel cap. VII della sua opera principale, Recherches sur les principes mathématiques de la Théorie des richesses (1838)²⁷, dedicato alla competizione tra i produttori, egli propone di rappresentare l'interdipendenza di ogni decisione attraverso una funzione di reazione.

Il mercato studiato da Cournot è composto da due imprese che, attingendo acqua da fonti di identica qualità ed a costo nullo, servono lo stesso mercato. Obiettivo di ognuna delle due imprese è la massimizzazione del proprio profitto, in maniera indipendente dall'altra²⁸. Le vendite totali sono espresse dalla funzione $D=f(p)$, con D_1 e D_2 che indicano la domanda per ognuno dei due produttori ($D_1+D_2=D$). Data la curva di domanda totale, la produzione ottimale di ogni duopolista è funzione del prodotto dell'altro duopolista²⁹ e i profitti, o ricavi, (R) delle due imprese sono dati da:

$$R_1 = D_1 \cdot f(D_1+D_2) \quad \text{e} \quad R_2 = D_2 \cdot f(D_1+D_2)$$

Per le condizioni di primo ordine di massimizzazione del profitto si ha:

$$\text{(per 1)} \quad \frac{d[D_1 \cdot f(D_1+D_2)]}{dD_1} = 0$$

$$\text{(per 2)} \quad \frac{d[D_2 \cdot f(D_1+D_2)]}{dD_2} = 0$$

I valori ottimali di D_1 , D_2 e p sono quindi determinati dal seguente sistema:

$$\begin{aligned} (1) \quad & f(D_1+D_2)+D_1 \cdot f_{D_1}(D_1+D_2) = 0 \\ (2) \quad & f(D_1+D_2)+D_2 \cdot f_{D_2}(D_1+D_2) = 0 \end{aligned}$$

Con due equazioni in due incognite è possibile trovare le due funzioni di reazione, esprimendo D_1 in funzione di D_2 e D_2 in funzione di D_1 . La conclusione di Cournot è che, con funzioni di reazione lineari, esiste un unico punto di equilibrio nel mercato di duopolio. Ipotizzando, per esempio, una funzione di domanda $D=A-p$ (con D domanda totale, A costante e p prezzo) e che le due imprese abbiano costi marginali k costanti ed identici, i rispettivi profitti vengono massimizzati per:

$$\begin{aligned} (1) \quad & D_1^* = (A-k-D_2)/2 \\ (2) \quad & D_2^* = (A-k-D_1)/2 \end{aligned}$$

Il sistema composto da due funzioni di reazione ha un'unica soluzione data da:

$$D_1^* = D_2^* = (A-k)/3$$

che è il punto in cui le curve che rappresentano le funzioni di reazioni si intersecano³⁰.

La determinazione dell'equilibrio di mercato di Cournot è stata interpretata nella letteratura recente³¹ sia come un processo di scelta simultanea che come modello di apprendimento. Nel primo caso, l'ipotesi di Cournot è che ogni impresa consideri fisso il livello di produzione della concorrente e adegui a questo parametro le proprie decisioni. Questa interpretazione appare come quella che meglio rappresenta le intenzioni originali: nella presentazione di Cournot non c'è infatti alcun accenno ad una evoluzione dinamica, né alla volontà di un imprenditore di 'scoprire' il livello produttivo dell'altro³². Raffigurandola come un modello di apprendimento se ne distorce perciò la natura ed il risultato è quello di arrivare ad un modello basato su ipotesi di comportamento irrealistiche. Cournot si limita a risolvere un problema di statica comparata³³, determinando le condizioni di equilibrio di un modello uniperiodale fondato sull'ipotesi di variazioni congetturali nulle. E' però, quest'ultima, una semplificazione decisiva³⁴ alla quale Cournot ne aggiunge un'altra: nel suo modello i consumatori sono agenti passivi poiché (a) il loro comportamento è fissato dai termini della curva di domanda, che viene considerata un parametro dato³⁵, (b) non hanno alcuna preferenza rispetto ai produttori e la loro scelta dipende solo dal prezzo di mercato³⁶.

La modernità dell'opera di matematizzazione della teoria economica compiuta da Cournot non gli consente di ottenere un consenso immediato³⁷. Deve infatti trascorrere un lungo periodo perché anche la discussione del problema dell'interazione strategica possa ulteriormente progredire.

Nel 1883, un umanista francese, Bertrand, offre un contributo critico che otterrà grande attenzione nella teoria dei giochi. Il suo intervento si limita³⁸ ad una recensione delle Recherches. Per Bertrand, lo scarso successo ottenuto dal libro di Cournot è dovuto al fatto che esso impiega in modo eccessivo la matematica, senza che questo imponente apparato conduca a risultati importanti. Il giudizio di Walras, che considera Cournot l'unico autore che ha impostato con chiarezza il problema del monopolio e che critica gli economisti ottocenteschi che lo hanno ignorato, non viene quindi condiviso da Bertrand:

La condamnation est sévère. Les calculs dont nous avons cité un passage ne sont pas clairs cependant pour tout le monde; les résultats semblent de petite importance; quelquefois même, je dois l'avouer, ils paraissent inacceptables³⁹

Bertrand sostiene la sua posizione analizzando proprio il cap. VII della Recherche, dedicato alla competizione tra i produttori. Due sono le critiche che egli rivolge a Cournot:

a) la collusione tra i due produttori è la soluzione più naturale in un mercato di duopolio perché è l'unica che consente di massimizzare il profitto⁴⁰;

b) la competizione ipotizzata da Cournot non è quella che realmente si verifica. E' sufficiente infatti che una delle due aziende abbassi il proprio prezzo, perché la domanda si rivolga interamente a lui, escludendo dal mercato l'altra impresa.

Une objection péremptoire se présente: dans cette hypothèse aucune solution n'est possible, la baisse n'aurait pas de limite; quel que soit en effet le prix commun adopté, si l'un des concurrents abaisse seul le sien, il attire à lui, en négligeant des exceptions sans importance, la totalité de la vente, et il doublera sa recette si son concurrent le laisse faire⁴¹.

L'errore di Cournot è dovuto al fatto che egli considera le quantità prodotte dai duopolisti come variabili indipendenti tra loro, mentre la realtà mostra una situazione del tutto diversa:

Si les formules de Cournot masquent ce résultat évident, c'est que, par une singulière inadvertance, il y introduit, sous le nom de D et D', les quantités vendues par les deux concurrents, et que, les traitant comme des variables indépendantes, il suppose que l'une verra à changer par la volonté de l'un des propriétaires, l'autre pourra rester constante. Le contraire est de toute évidence⁴².

Bertrand propone quindi la sostituzione della quantità con il prezzo, che assume nella sua critica il ruolo di variabile strategica delle imprese. In questo modo, egli è in grado di spiegare il processo di formazione dei prezzi⁴³, assegnando un ruolo attivo ai consumatori nella loro determinazione⁴⁴: ogni consumatore cerca, senza costi, l'impresa col prezzo più basso ed è solo quest'ultima a incrementare le proprie vendite.

Il suo contributo, che coglie quindi alcuni importanti elementi empirici, è però sottoponibile alla stessa critica già fatta a Cournot: l'azzeramento della variazione congetturale.

Quest'ultima ipotesi caratterizza anche il terzo modello di duopolio ottocentesco che impiega il concetto di funzione di reazione. Francis Y. Edgeworth⁴⁵ riprende nel 1897 il modello di Cournot, correggendone le conclusioni e sviluppando quelle implicite nella critica di Bertrand. Egli dimostra che, considerando il prezzo come variabile strategica, le condizioni previste da Cournot non consentono di determinare un unico equilibrio. Si consideri infatti la possibilità che uno dei duopolisti adotti una politica 'cut-throat' per escludere il concorrente dal mercato: nel mercato si determinerà un eccesso di domanda⁴⁶. L'altra impresa potrà allora coprire la domanda residua ad un prezzo più alto di quello d'equilibrio. A sua volta, l'impresa ribassista

potrà rivedere la sua politica dei prezzi ed imitare il rialzo della concorrente. Questo processo rende impossibile determinare un unico prezzo di equilibrio; esso implica che nel mercato sono possibili diversi prezzi, compresi tra un livello massimo definito dal prezzo di collusione o di monopolio ed un livello minimo corrispondente all'uguaglianza tra prezzo e costo medio⁴⁷.

L'errore di Cournot è dovuto, secondo Edgeworth, all'adozione di ipotesi non dissimili da quelle che rendono possibile l'equilibrio di concorrenza perfetta definito da Walras:

che è definita dalla condizione che abbia da essere impossibile che alcuno dei contraenti che trovasi da parte dai compratori o dei venditori, faccia un nuovo sistema di contratti con alcuno o con tutti gli altri contraenti dell'altra parte, in modo tale che tutti coloro che prendono parte ai nuovi contratti si trovino ad aver migliorata la posizione che avevano secondo i contratti precedenti⁴⁸.

Ma se i mercati delle due imprese non sono distinti - ci troviamo in presenza di un duopolio e non di un doppio monopolio - ogni impresa può, variando il prezzo, ricontrattare autonomamente le condizioni della sua offerta al mercato. E' quindi il concetto di contrattazione che permette di abbandonare la soluzione di Cournot. La discussione di Edgeworth di questo problema, presentata nel paragrafo 2.6, gli consente di impostare su nuove basi l'analisi di equilibrio economico generale di Walras ed essa rappresenta il principale contributo dell'economia ottocentesca alla teoria dei giochi.

2.3 La teoria del duopolio : la variazione congetturale

L'ipotesi di variazione congetturale uguale a 0, comune a Cournot, Bertrand e Edgeworth, viene criticata nel 1898 da Fisher⁴⁹. Nonostante la funzione di reazione consenta di determinare una teoria di comportamento razionale in duopolio, essa si fonda sulla costanza della quantità prodotta (o del prezzo) del rivale. Questa ipotesi la rende, in un contesto di scelta simultanea, uno strumento inapplicabile e che esclude a priori atteggiamenti di tipo collusivo.

Il concetto di variazione congetturale deve però attendere il lavoro di Frisch nel 1933⁵⁰ per ottenere una definitiva sistemazione teorica. Frisch parte dall'idea che il comportamento di un agente economico sia determinato da parametri di azione, che corrispondono a quelle grandezze economiche che ogni agente può fissare liberamente. In base a questo concetto possono essere definite tre possibili forme di comportamento dell'impresa:

(a) tutti gli imprenditori agiscono autonomamente e i parametri di azioni del rivale vengono considerati costanti: la variazione congetturale è uguale a 0;

(b) tutti gli imprenditori agiscono congetturalmente e tengono conto del fatto che cambiamenti nei loro parametri di azione possono provocare cambiamenti nei parametri di azione dei rivali: la variazione congetturale è diversa da 0;

(c) alcuni imprenditori agiscono autonomamente, altri congetturalmente.

Questa classificazione consente di distinguere i modelli di duopolio con variazione congetturale di Bowley (1924), Coase (1935) e

Smithies - Savage (1940), che rientrano nel caso (b), da quello di Von Stackelberg (1934), compreso nel caso (c).

Il primo economista ad introdurre il concetto di variazione congetturale è Bowley⁵¹. Nel suo modello di duopolio, il livello di produzione che massimizza il profitto dipende non solo dalla quantità prodotta dal concorrente, ma anche da come ogni impresa stima che l'altra reagirà alle sue variazioni di produzione. Questa reazione viene espressa da Bowley attraverso le derivate dx_2/dx_1 e dx_1/dx_2 , in cui x_1 e x_2 sono le quantità prodotte rispettivamente dall'impresa 1 e dall'impresa 2. Per l'impresa 1, il ricavo marginale, $d(p \cdot x_1)/dx_1$, è rappresentato da:

$$p + x_1 \cdot f'(x_1+x_2) + x_1 \cdot f'(x_1+x_2) \cdot (dx_2/x_1)$$

dove f' misura l'effetto della variazione del prodotto totale sul ricavo marginale e (dx_2/x_1) l'effetto della reazione dell'impresa 2 alla variazione della produzione dell'impresa 1 sul ricavo marginale.

Per massimizzare i profitti in un contesto di scelta simultanea, l'impresa 1 deve stimare il valore dell'espressione dx_2/dx_1 . Se questa stima non si rivela corretta, il duopolista può allora nei periodi successivi correggere la sua variazione congetturale fino a che questa non sia esatta. Bowley risolve quindi il problema dell'interazione strategica assumendo che l'impresa, se non è perfettamente informata sul comportamento della rivale, ricorra ad un processo di apprendimento che le consenta di prevedere esattamente tale reazione. Ma da un punto di vista statico, il suo modello incorre nelle stesse difficoltà di quello di Cournot. Il problema di stimare la reazione del rivale appare infatti irrisolvibile nella realtà⁵².

Un parziale tentativo di descrivere il processo di apprendimento ipotizzato da Bowley viene fatto da Coase nel 1935. Il suo articolo dimostra chiaramente le difficoltà di stimare le variazioni congetturali e di fondare su di esse la determinazione di un equilibrio di mercato⁵³.

Coase considera il prezzo come variabile strategica e studia gli effetti di una competizione tra duopolisti che ipotizzano variazioni congetturali diverse da 0. Pur non adottando esplicitamente un orizzonte multiperiodale, il suo modello si sviluppa secondo una serie di mosse successive. Nella prima mossa uno dei duopolisti (A) fisserà il suo prezzo in modo indipendente dall'altro (B). Nella mossa successiva, B reagirà nell'unico modo a lui conveniente, quello che massimizza il suo profitto dato il comportamento di A. A quel punto le condizioni di domanda per entrambi le imprese saranno note e sia A che B potranno decidere se mutare o no il proprio prezzo. L'analisi delle varie alternative non conduce però Coase ad alcuna previsione:

Which position will be adopted will, therefore, depend on chance, or, rather, on the estimates of A and B regarding their relative pertinacities⁵⁴.

La considerazione di più mosse introduce anzi un ulteriore motivo di incertezza: la decisione di ogni produttore dipende dalla velocità con cui avvengono le reazioni del rivale. La presenza di ritardi temporali nelle reazioni provoca guadagni temporanei che rendono instabile qualsiasi situazione di equilibrio. Il risultato più probabile è, secondo Coase, che l'incertezza di ogni equilibrio conduca i due produttori ad un accordo, tacito od esplicito.

Una modellizzazione dinamica, più rigorosa matematicamente, dell'approccio di Bowley viene presentata nel 1940 da A. Smithies e L. J. Savage. Nel processo descritto, i duopolisti assumono una visione multiperiodale:

In planning his production for any unit period, a producer will therefore consider both the profits he makes in that period and also whether he is placing himself in a strategic position to make profits in future period⁵⁶.

Smithies e Savage cercano di predire un equilibrio impiegando due diverse ipotesi sul comportamento delle imprese:

1) ogni duopolista assume che l'altro fissi la propria produzione facendo una media ponderata tra i livelli di produzione di entrambi nel periodo precedente⁵⁷;

2) ogni competitore assume che l'output del rivale crescerà nella prossima unità di tempo allo stesso tasso attuale.

La prima ipotesi è un esempio di variazione congetturale⁵⁸ ed in questo caso nel mercato tende a stabilirsi una collusione tacita, in cui i duopolisti si comporteranno come un singolo monopolista. La correttezza formale di questo risultato dipende comunque da un'ipotesi fortemente restrittiva, ed inevitabilmente arbitraria, sulla variazione congetturale.

Il caso (c) della classificazione di Frisch, in cui un'impresa agisce congetturalmente e l'altra autonomamente, viene discusso da Von Stackelberg negli anni '30. L'economista tedesco rivolge la sua attenzione al fatto che ogni duopolista tenterà di influenzare l'offerta del concorrente. In un "mercato trasparente"⁵⁹ ogni duopolista conosce la funzione di reazione dell'altro e tenta in qualche modo di condizionarla con il fine di assumere una posizione di predominio. Le alternative possibili sono due: comportarsi come 'follower' o come 'leader'. Nel primo caso l'impresa adotta il modello di Cournot, azzerando il valore della sua variazione congetturale: il comportamento del rivale viene considerato fisso e il 'follower' adatta le sue decisioni alla politica prezzi/quantità del 'leader'. Quest'ultimo adotta, invece, una specifica variazione congetturale: poiché le sue decisioni vengono considerate dal 'follower' come date, introduce questa informazione nel suo calcolo di massimizzazione del profitto. Come è noto, Stackelberg dimostra che solo a questo rapporto asimmetrico corrisponde un equilibrio di mercato. Quest'ultimo non sembra però il risultato più probabile né il più stabile, poiché ci sarà sempre una tendenza da parte delle imprese ad abbandonare la propria posizione, provocando un conflitto dalle conseguenze indeterminate.

E' quindi evidente in Stackelberg la coscienza che l'elemento fondamentale della stabilità del mercato sta nella capacità di indurre l'altro a sottostare alla propria volontà, anche attraverso l'inganno e il bluff:

To achieve this, he will attempt to bluff his rival into believing that, whatever the latter does, he himself will cling imperturbably to the position aimed at⁶⁰.

Ma questa notazione conduce ad una visione conflittuale del mercato che non consente soluzioni semplici. La critica, più volte rivolta a Stackelberg, sulla falsità delle sue assunzioni di comportamento⁶¹, non coglie quindi il vero significato del suo contributo. Proprio per lo

scarso realismo che caratterizza la configurazione di equilibrio, il suo modello rappresenta una cesura rispetto alla letteratura che lo precede per almeno due motivi: esso dimostra che ogni equilibrio in un mercato di duopolio è instabile; conferma, inoltre, che ogni descrizione dell'interazione strategica attraverso funzioni di reazioni o ipotesi di variazione congetturale è basata necessariamente su definizioni arbitrarie del comportamento del rivale⁶².

2.4 La teoria del duopolio: la competizione spaziale

Le conclusioni critiche di von Stackelberg non sono applicabili alla modellizzazione matematica più interessante della funzione di reazione, che viene costruita da Harold Hotelling nel 1929. Il suo articolo *Stability in Competition* descrive un processo di competizione spaziale⁶³ tra due venditori, arrivando alla conclusione che entrambi tenderanno a occupare stabilmente il punto centrale del mercato⁶⁴. La principale conseguenza teorica è che l'«economic principle» può creare un equilibrio stabile anche in assenza di atteggiamenti collusivi. Hotelling riesce inoltre a superare, almeno parzialmente, l'arbitrarietà delle funzioni di reazioni adottate dagli economisti ottocenteschi, precorrendo la teoria dei giochi per almeno due aspetti⁶⁵:

a) descrive strategicamente il comportamento delle due imprese, le cui scelte sono esplicitamente interdipendenti⁶⁶;

b) assegna alla localizzazione geografica delle imprese, considerata come una forma di qualità del prodotto, il ruolo di variabile decisionale⁶⁷.

Anche se Hotelling non inserisce un'ipotesi di variazione congetturale, egli costruisce il modello d'interazione strategica più completo tra quelli che precedono la teoria dei giochi.

Stability in Competition si apre con una critica alla linea di pensiero Cournot-Bertrand-Edgeworth, che per Hotelling non coglie un aspetto fondamentale del duopolio:

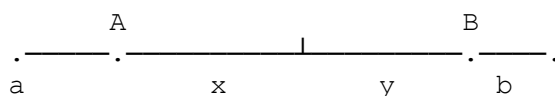
all writers since Cournot, except Sraffa and Amoroso, seem to hold that even apart from the likelihood of combination there is an essential instability in duopoly. Now it is true that such competition lacks complete stability; but we shall see that in a very general class of cases the independent actions of two competitors not in collusion lead to a type of equilibrium much less fragile than in the examples of Cournot, Edgeworth and Amoroso⁶⁸.

Anche la conclusione del modello di Edgeworth - l'assenza di una soluzione determinata - non tiene conto dell'effetto stabilizzante di masse di consumatori che possono avere una preferenza naturale per uno dei due venditori⁶⁹. Solo non rilevando questo elemento, Edgeworth può supporre che un'impresa sia in grado di sottrarre al rivale l'intera quota di mercato vendendo a un prezzo più basso. Nella realtà esistono invece discontinuità nella relazione tra prezzo e domanda e di solito una lieve crescita nel prezzo da parte di un venditore provocherà al concorrente solo l'acquisizione di pochi clienti⁷⁰. A differenza di quanto avviene nel modello di Edgeworth, il prezzo non cade mai sotto il livello di equilibrio, poiché l'effetto stabilizzante degli "intermediate customers who shift their purchases gradually with changing prices makes

itself felt in the existence of a pair of minimum prices."⁷¹. L'elemento che nella rappresentazione di Hotelling motiva questa gradualità nella variazione della domanda rispetto al prezzo è l'estensione spaziale del mercato.

Il modello di Hotelling è composto da due imprese, A e B, che vendono un bene identico, a costo nullo, e che devono decidere in quale punto del mercato collocarsi. Siano:

p_1, q_1 prezzo e quantità di A
 p_2, q_2 prezzo e quantità di B
 L lunghezza totale del mercato, che corrisponde ad un numero fisso di consumatori, uno per ogni unità di distanza e che acquistano una sola unità del bene⁷²
 a, b distanze, rispettivamente, di A e B dai rispettivi estremi del mercato
 x, y estensione del mercato, rispettivamente, di A e B in direzione opposta a quella dei rispettivi punti estremi
 c costo di trasporto della merce per unità di distanza a carico del compratore



I consumatori posti nella regione a acquisteranno i beni venduti da A, purché il suo prezzo non sia maggiore della somma tra il prezzo di B e il costo di trasporto del bene da A a B. Allo stesso modo, la regione b si rivolgerà a B, se il prezzo di quest'ultimo è minore della somma tra il prezzo di A e il costo di trasporto da A a B. Le due condizioni

$$p_1 < p_2 - c(L-a-b)$$

$$p_2 < p_1 - c(L-a-b)$$

restringono il problema della locazione ottimale alla determinazione dei segmenti centrali x e y . La scelta dei consumatori dipende da due elementi: la differenza tra i prezzi dei due venditori, comprensivi dei costi di trasporto e la lunghezza del mercato. Una prima equazione è data quindi dall'uguaglianza tra i prezzi dei due venditori:

$$p_1 + cx = p_2 + cy$$

Il problema è inoltre definito da un vincolo di carattere spaziale:

$$a + x + y + b = L$$

Risolvendo il sistema composto dalle due equazioni precedenti si possono esprimere i profitti di A e di B ($\hat{\pi}_1$ e $\hat{\pi}_2$) in funzione dei prezzi p_1 e p_2 :

$$\hat{\pi}_1 = p_1 q_1 = p_1(a+x) = \frac{1}{2} (L+a-b)p_1 - \frac{p_1^2}{2c} + \frac{p_1 p_2}{2c}$$

$$\hat{\pi}_2 = p_2 q_2 = p_2(b+y) = \frac{1}{2} (L-a+b)p_2 - \frac{p_2^2}{2c} + \frac{p_1 p_2}{2c}$$

Calcolando le derivate prime delle due equazioni precedenti rispetto ai prezzi corrispondenti si ottengono i seguenti valori ottimali:

$$\begin{aligned} p_1 &= c [L + (a - b)/3] & q_1 &= (1/2) [L + (a - b)/3] \\ p_2 &= c [L + (b - a)/3] & q_2 &= (1/2) [L + (b - a)/3] \end{aligned}$$

da cui è possibile calcolare i profitti:

$$\hat{\pi}_1 = (c/2) [(L + (a-b)/3)]^2 \quad \hat{\pi}_2 = (c/2) [(L + (b-a)/3)]^2$$

Queste due ultime espressioni, che contengono come uniche variabili, rispettivamente, i valori $(a-b)$ e $(b-a)$ consentono di trarre due conclusioni:

1) I due venditori tenderanno a collocarsi il più possibile l'uno vicino all'altro. Se A sceglie una qualsiasi collocazione, B sceglierà un valore di b più alto possibile in modo da massimizzare il suo profitto $\hat{\pi}_2$: B tenderà ad avvicinarsi alla locazione di A. Se è B a fissare la propria locazione, A massimizzerà a .

2) Questo processo di 'gravitazione' di un venditore verso l'altro termina solo quando entrambi occupano il centro del mercato. Se infatti A sceglie una posizione diversa dal centro, B potrà avvantaggiarsene, rendendo b maggiore di a . La stessa considerazione vale sostituendo B ad A.

La possibilità che si verificano deviazioni dai prezzi di equilibrio non muta queste conclusioni. Se uno dei due venditori è disposto a sacrificare il suo reddito immediato, potrà aumentare il prezzo nella speranza che il rivale faccia altrettanto. Se questo avviene, si determina una situazione in cui entrambi riescono ad accrescere i profitti senza che ciò sia il risultato di un accordo formale. Ma questa collusione tacita è resa fragile da vari fattori: il prevalere di una visione di breve periodo, il continuo cambiamento delle condizioni di costo e di domanda o l'illegalità di manovre collusive.

E' sufficiente, per esempio, che uno dei duopolisti abbia un improvviso bisogno di liquidità. Egli abbasserà quindi il suo prezzo, facendo crescere le sue vendite e i suoi profitti; il rivale non potrà che seguirlo nella diminuzione del prezzo se vuole recuperare la sua quota di profitto. Questa corsa al ribasso si ripeterà più volte fino a che non saranno nuovamente raggiunti i valori di equilibrio. Nessuno dei due competitori avrà ora interesse ad abbassare ulteriormente il prezzo, poiché l'aumento conseguente delle vendite non potrà ricompensarlo del minore ricavo unitario.

La discussione di Hotelling considera infine altri elementi che la rendono più realistica: l'introduzione di un terzo venditore; il grado di segretezza che può essere mantenuto; la possibilità di discriminazione tra i clienti; l'influenza dell'abitudine e della perseveranza sulla fiducia tra i competitori; la frequenza con cui è possibile mutare un prezzo o un tasso di produzione; il valore relativo per l'imprenditore di profitti immediati e remoti.

Da questa esposizione di Stability in Competition emerge la modernità del modello di Hotelling, che comprende alcuni elementi che caratterizzano la teoria dei giochi:

1) i comportamenti dei due venditori sono strategicamente interdipendenti, poiché la lunghezza finita del mercato rende a e b, e quindi x e y, complementari;

2) il modello è facilmente traducibile come un gioco in forma estesa a due periodi: prima ogni impresa sceglie la locazione del mercato, poi il prezzo;

3) viene descritto il processo che conduce all'equilibrio;

4) le strategie a disposizione delle imprese includono più di una variabile: come scrive lo stesso Hotelling la scelta della localizzazione "is only a figurative term for a great congeries of quality"⁷³, a cui può essere sostituita una qualunque qualità del prodotto.

La discussione sull'articolo di Hotelling, dopo un periodo di relativa disattenzione⁷⁴, si sviluppa negli anni '40 rimuovendo alcune sue ipotesi semplificatrici⁷⁵. Austin Robinson (1941) offre l'estensione più interessante, mettendo in luce che l'assenza nel modello di Hotelling di un'ipotesi di variazione congetturale lo rende solo un caso speciale⁷⁶. La tendenza delle due imprese a collocarsi al centro del mercato viene meno se un venditore modifica il suo prezzo in base ad una stima della reazione dell'altro. L'unico risultato ottenuto da Robinson, ipotizzando diverse forme di variazione congetturale, è di invalidare le conclusioni di Hotelling. I motivi del suo fallimento nel tentativo di 'chiudere', con le ipotesi di Bowley, un modello di interazione strategica sono gli stessi già evidenziati dalla critica di Stackelberg.

2.5 La teoria della concorrenza monopolistica

L'analisi dei mercati oligopolistici, dei quali il duopolio è un caso particolare, viene affrontata prima del 1944 anche dalla teoria della concorrenza monopolistica, che rappresenta una prima parziale risposta alla degenerazione del programma di ricerca neoclassico. Gli anni '30, quelli definiti della 'high theory', sono paradossalmente un periodo di crisi teorica⁷⁷. L'estensione dell'analisi economica a mercati diversi da quelli di concorrenza perfetta o di monopolio mette in evidenza l'inadeguatezza della teoria neoclassica, imponendo una sua revisione⁷⁸. L'invenzione da parte di Chamberlin del concetto di concorrenza monopolistica può essere considerato un primo tentativo in questa direzione. L'approccio adottato dagli economisti che entrano a fare parte di questa scuola di pensiero è però tutt'altro che rivoluzionario: l'apparato matematico resta frammentario⁷⁹ e la metodologia di analisi rimane legata alla strumentazione neoclassica. Il loro contributo più importante alla teoria dei giochi è invece un altro: l'allargamento del numero di variabili che determinano il comportamento degli agenti economici, includendo tra queste anche la possibilità di entrata e di uscita dal mercato delle imprese. Da questa novità teorica provengono due conseguenze metodologiche: gli strumenti della matematica differenziale diventano inadeguati per la trattazione della teoria economica e si manifesta, inoltre, in modo pressante l'esigenza di dotarsi di nuovi metodi di analisi dinamica.

L'opera principale del fondatore della nuova teoria, A. H. Chamberlin (1933), parte dal riconoscimento della grande complessità che caratterizza l'analisi dei mercati oligopolistici⁸⁰. I modelli che ne analizzano il funzionamento devono adottare metodologie diverse, che sono

classificabili secondo (a) i concetti di soluzione applicati, (b) i tipi di azione a disposizione dei giocatori, (c) il ruolo attribuito al tempo. Nell'analisi di Chamberlin a questi tre aspetti corrispondono altrettante proposte: (a) la differenza tra piccolo e grande gruppo, (b) la differenziazione del prodotto, la considerazione delle strutture finanziarie e patrimoniali delle aziende, i costi di pubblicità e di vendita e (c) la considerazione del problema dell'entrata di nuove imprese e dell'esclusione di altre.

All'abbandono del concetto di concorrenza pura, che deriva dall'introduzione di questi elementi, non corrisponde però la fondazione di una nuova metodologia economica. Le principali caratteristiche dei mercati oligopolistici vengono identificate non attraverso la considerazione delle relazioni fra gli agenti, ma impiegando uno strumento che si riferisce all'azione dell'individuo considerato in isolamento: la pendenza della curva delle sue vendite. L'effetto dell'introduzione di elementi monopolistici nella concorrenza è perciò solo quello di rendere decrescente la curva di domanda fronteggiata da ogni impresa:

In other words, an essential part of free enterprise is the attempt of every business man to build up his own monopoly, extending it wherever possible and defending it against the attempts of others to extend them. (...) pure competition may no longer be regarded in any sense an 'ideal' for purposes of welfare economics⁸¹.

Questa lettura del funzionamento dei mercati si traduce nell'adozione di un'analisi di equilibrio parziale, che si limita allo studio di un'industria o di un gruppo di imprese che producono lo stesso bene. L'interdipendenza strategica riceve, all'interno di questo modello, una soluzione che dimostra l'incapacità di trattarla formalmente: la complessità delle variabili da analizzare può essere risolta solo attraverso un comportamento collusivo nel modello del 'grande gruppo'⁸², l'unico in grado di evitare conflitti dai risultati imprevedibili⁸³ e di determinare la massimizzazione dei profitti.

Chamberlin non viene meno a questa impostazione neppure nel caso del 'piccolo gruppo', in cui la presenza di poche imprese rende più evidente i problemi creati dalla presenza dell'interazione strategica⁸⁴. Le soluzioni proposte da Chamberlin ricorrono a due diverse assunzioni: (1) il venditore è in grado di conoscere l'effetto finale di ogni suo cambiamento di prezzo e stima una funzione di domanda fondata su questa informazione⁸⁵: egli compie, cioè, delle variazioni congetturali assolutamente corrette; (2) i venditori ignorano del tutto la reazione dei concorrenti, come avveniva nei modelli di Cournot o di Edgeworth⁸⁶.

Le conclusioni di Chamberlin diventano ancora più incerte quando egli introduce gli altri aspetti qualitativi che caratterizzano la sua analisi (differenziazione del prodotto, pubblicità, localizzazione). L'azione di ogni agente economico diventa funzione di più variabili in relazione tra loro, rendendo complessa la modellizzazione dei mercati attraverso l'analisi differenziale o mediante la rappresentazione grafica. Le stesse difficoltà riguardano un'altra novità concettuale presentata da Chamberlin: la possibilità che nuove imprese entrino nel mercato. Questa variabile viene discussa con un'analisi semi-dinamica, che conduce però a modelli eccessivamente semplicistici.

Contemporaneamente a Chamberlin, Joan Robinson tenta un processo analogo di rifondazione della teoria economica, ma la sua analisi appare, dal punto di vista della presentazione formale, ancora più legata alla

matrice neoclassica. Il suo libro del 1933, *Economics of Imperfect Competition*, più che un superamento dell'analisi tradizionale del comportamento imprenditoriale, rappresenta un esempio, nella terminologia di Lakatos, di 'degenerating programme': un programma di ricerca che, attraverso correzioni della 'protective belt', tenta di adattarsi ad una nuova realtà empirica senza però riuscire ad interpretarla o a predirne il funzionamento. Rappresentando le 'imperfezioni' di mercato solo attraverso una variazione dell'inclinazione della curva di domanda, la Robinson adotta un elegante stratagemma per continuare a considerare centrale l'ipotesi di concorrenza perfetta, riproponendone le leggi anche per situazioni diverse. Ma in questo modo ella non coglie le peculiarità dei mercati oligopolistici. Questo tradizionalismo metodologico della Robinson non le consente neppure di condividere l'intuizione originale di Chamberlin: il ruolo fondamentale della qualità del prodotto e del concetto di entrata nel comportamento delle imprese⁸⁷.

La critica più efficace alla teoria della concorrenza monopolistica proviene nel 1941 da Robert Triffin. Egli scrive:

the unreal atmosphere which surrounds our current theories of oligopoly may be ascribed to the fact that the assumptions are too often chosen for their analytical convenience, rather than for their actual relevance to the real world of today⁸⁸.

Secondo Triffin, la caratteristica principale della concorrenza monopolistica è da ricercare non nella teoria dell'unità economica, ma in quella dell'interdipendenza esterna. I ritardi dell'economia in questa direzione sono dovuti ad un errore di metodo:

By virtue of definition, the latter question cannot be successfully attacked with the tools of particular equilibrium, forged as they are for the study of one economic unit (the industry yesterday, now the individual firm) in isolation from the rest of the system⁸⁹.

I due problemi che un'impresa 'non isolata' deve affrontare sono più complessi di quelli discussi dalla teoria neoclassica. Il primo, la determinazione delle curve di domanda e di offerta, è risolvibile solo all'interno di una trattazione di tipo dinamico, che è al di fuori dei limiti che Triffin impone al proprio lavoro. Il secondo problema è quello dell'interdipendenza delle imprese, che può invece essere discusso all'interno di un'analisi statica. A questo proposito, Triffin individua molto chiaramente il problema che sarà oggetto del libro di von Neumann e Morgenstern (1944):

The root of the difficulty, in the case of oligopolistic interdependence, may be stated as follows: if a seller has such an influence upon one or several competitors that his own price-output decisions are capable of influencing the price-output decisions of this, or these, competitors, this influence will be a factor to be taken into account in his profit-maximizing calculations. This would not be so troublesome if this influence were perfectly definite, the other sellers taking passively the decisions of the first as parameters of action. But the other sellers may also have an influence on the first one, and will then try also to take advantage of it to induce him to take some price-output decision favorable to their own interests. It is this mutual, but indecisive, influence that opens the door to an infinitely varied pattern of possibilities⁹¹.

Lo strumento con cui Triffin tenta di descrivere questa influenza, tipica dei mercati oligopolistici, è il grado di sostituibilità tra due beni. Il prodotto di un'impresa i è più o meno simile a quello dell'impresa j in base al valore assunto dall'elasticità incrociata della domanda:

$$e_{ij} = \frac{D_{qi}}{q_i} : \frac{D_{pj}}{p_j} = \frac{D_{qi}}{D_{pj}} \cdot \frac{p_j}{q_i}$$

Questa espressione rappresenta una misura del cambiamento delle vendite dell'impresa i in funzione del cambiamento di prezzo dell'impresa j . Attraverso il valore assoluto e il segno di questo coefficiente è possibile determinare il tipo di mercato di cui fanno parte le due imprese i e j . Se e_{ij} è uguale a 0 non ci sarà relazione tra la domanda che si rivolge alle due imprese, che possono essere considerate in regime di monopolio; se e_{ij} è un numero finito la competizione è di tipo oligopolistico (o eterogeneo); se, infine, e_{ij} assume un valore infinito il mercato è quello di concorrenza perfetta (o omogeneo).

L'elasticità incrociata consente quindi di rilevare il grado di interrelazione della domanda di mercato per uno stesso prodotto. Lo sforzo di Triffin non va però oltre questo risultato parziale. La riflessione successiva mostrerà che il suo strumento è sottoponibile ad almeno due critiche:

a) la definizione di elasticità incrociata è ambigua: può non avere un valore unico, come nel caso della curva di domanda spezzata di Sweezy e Bain;

b) è inutile come descrizione della natura della concorrenza nel mercato e della sua struttura, non affrontando direttamente il problema dell'interazione strategica.

Nonostante queste limitazioni, Triffin è cosciente più della Robinson e di Chamberlin dell'importanza di quest'ultimo elemento nel mercato oligopolistico ed è il primo che tenta di inserirlo in una struttura generale, ma i limiti contenuti negli strumenti matematici impiegati non gli consentono di compiere decisivi passi in avanti. La chiarezza della sua visione è dimostrata anche dal fatto che egli intuisce la relazione tra l'economia e i giochi⁹², che pochi anni dopo caratterizza Theory of Games and Economic Behavior:

It is only this mutual interaction that offers some leeway for the poker game element which characterizes the oligopolistic problem⁹³.

2.6 La teoria della contrattazione

La teoria della contrattazione è un altro ambito teorico in cui la considerazione dell'interazione strategica è inevitabile. L'economia neoclassica evita anche in questo caso di affrontare direttamente il problema. Nella concorrenza perfetta di Walras tutti gli agenti economici si adattano ad un sistema di prezzi scelti dal banditore per uguagliare domanda e offerta. Gli individui agiscono come se, invece di contrattare uno scambio, rispondessero passivamente a movimenti nel prezzo di mercato. Ma il processo di 'tâtonnement' attraverso il quale si perviene

all'equilibrio non è un'efficace rappresentazione di ciò che avviene nella realtà.

L'esternalità del sistema dei prezzi rispetto all'azione degli agenti economici è in parte rimossa dall'opera di Pareto. La sua analisi ricerca le condizioni di efficienza dell'economia con una distribuzione non specificata delle risorse⁹⁴. Il risultato è lo stesso di Walras: un sistema economico è in equilibrio se e solo se esiste un sistema di prezzi a cui ogni consumatore e ogni produttore si adatta. Ma in Pareto ciò che conduce all'equilibrio finale è il processo di scambio, che riceve nell'ambito della determinazione del sistema socialmente migliore, la sua prima definizione generale: un contratto è ottimo se esso non è ulteriormente migliorabile senza peggiorare la soddisfazione di almeno uno dei contraenti.

Il terzo, e decisivo, progresso verso una descrizione più realistica del processo di scambio nell'ambito dell'equilibrio competitivo è compiuto da Edgeworth, che, in *Mathematical Physics*, introduce una distribuzione di risorse specificata. In questo modo, Edgeworth rimuove definitivamente l'esternalità dei prezzi rispetto all'azione degli individui: l'equilibrio economico emerge direttamente dal processo di contrattazione. L'analisi economica sposta il proprio baricentro dal mercato, visto impersonalmente, agli individui che rappresentano agenti attivi in grado di scambiarsi liberamente i beni.

Il modello più semplice analizzato da Edgeworth è quello dello scambio di due beni tra due individui. Ogni agente possiede un insieme di preferenze rappresentabili da una famiglia di curve convesse che ordinano le combinazioni dei beni da scambiare. Prima della contrattazione, i due individui, X e Y, possiedono una quantità iniziale dei due beni, a cui corrisponde una certa soddisfazione, rispettivamente u_x o u_y . La condizione, definita da Pareto, che rende possibile uno scambio è che esso migliori o, nella peggiore delle ipotesi, non muti i valori u_x e u_y . Edgeworth si chiede quale sarà l'accordo finale di questo processo di scambio:

the answer is in general that contract by itself does not supply sufficient conditions to determinate the solution; supplementary conditions as will appear being supplied by competition or ethical motives⁹⁵.

Il principio paretiano consente infatti di individuare come risultato ottimale dello scambio solo un insieme di punti, la curva dei contratti formata dai punti di tangenza delle curve di indifferenza dei consumatori, ma la determinazione di un unico risultato all'interno di questo insieme rimane un fatto arbitrario⁹⁶.

Questa indeterminatezza viene meno solo con l'incremento del numero degli individui coinvolti nello scambio. Se ai primi due contraenti X e Y, si aggiungono un secondo X e un secondo Y, l'insieme dei punti di equilibrio possibili non coinciderà più con l'intera curva dei contratti precedente alla loro entrata. Le allocazioni di beni situate vicino ai precedenti limiti estremi della curva dei contratti saranno ora ulteriormente migliorabili in senso paretiano. Uno degli Y potrà infatti, senza il consenso dell'altro Y⁹⁷, ricontrattare il proprio accordo con gli altri due individui X, con vantaggio per tutte e tre le parti rispetto al contratto precedentemente concluso. L'ampliamento delle possibilità di scambio, che corrisponde alla crescita del numero degli agenti, restringe quindi l'insieme delle allocazioni di beni situate sulla curva dei contratti ad un unico punto, che coincide con quello indotto dalla "smooth machinery"⁹⁸ della concorrenza perfetta walrasiana.

A tale risultato si giunge non postulando l'uniformità del prezzo e un mercato impersonale, ma attraverso il processo di contrattazione, che consente una maggiore generalità di applicazione⁹⁹.

Edgeworth compie quindi un rovesciamento logico dell'economia neoclassica: il benessere collettivo viene raggiunto attraverso l'azione delle volontà individuali che, invece di subire il sistema dei prezzi, si oppongono l'una all'altra, combinandosi attraverso lo scambio. Le conseguenze immediate sono due:

1) è possibile descrivere un equilibrio economico partendo dall'analisi dei comportamenti individuali e non ricorrendo più a fattori esterni ad essi;

2) la definizione della razionalità del comportamento economico deve tenere conto della natura sociale del mercato: ogni individuo determina la sua posizione economica attraverso accordi e coalizioni con gli altri individui.

Questa vera e propria riscrittura dell'analisi neoclassica crea quindi le premesse metodologiche del suo successivo superamento compiuto dalla teoria dei giochi.

Edgeworth, offrendo un'applicazione della sua teoria al problema della contrattazione tra lavoratori e datori di lavoro, mostra di avere piena coscienza della profonda critica rivolta alla teoria economica precedente:

Se tale veduta è corretta, sembrerebbe che riguardo agli effetti dei sindacati, come anche a proposito della predeterminatezza del fondo salari, il 'pensiero non guidato' del lavoratore sia giunto al centro della questione più direttamente che non l'intelligenza di economisti, sviati da un metodo cattivo in quanto propensi a ragionare di argomenti matematici senza la matematica¹⁰⁰.

E' certo questa grande novità dell'approccio di Edgeworth che spiega la scarsa attenzione riservatagli fino alla riscoperta di Martin Shubik nel 1959¹⁰¹. La stessa teoria della contrattazione, che avrebbe dovuto rappresentare l'ambito teorico più adatto per sviluppare le sue intuizioni, continua a fare proprio il paradigma neoclassico.

Anche Pigou e Hicks, gli economisti più autorevoli che si confrontano con il problema della contrattazione tra sindacati e datori di lavoro, offrono contributi schematici. Pigou¹⁰² definisce uno spazio di contratti praticabili, i cui limiti sono definiti dalla differenza tra i benefici e i costi attesi di un conflitto stimati dalle parti. Hicks¹⁰³ introduce il concetto di concessione, fatta da una parte all'altra se il conflitto, che essa consente di evitare, ha un costo atteso maggiore della concessione stessa. Per il datore di lavoro vale allora una relazione diretta tra il salario e la lunghezza sopportabile di un conflitto, per il sindacato una relazione inversa. L'incrocio di queste due curve, che hanno pendenza opposta, consente di determinare un unico salario, il più alto che i sindacalisti sono in grado di ottenere.

Le soluzioni sia di Pigou che di Hicks sono comunque condizionate dalla necessità di riproporre le ipotesi e gli strumenti dell'analisi neoclassica, in particolare l'uguaglianza tra tassi marginali. Gli equilibri proposti appartengono alla curva dei contratti, ma la selezione di un punto unico è il frutto del calcolo costi/benefici fatto da ognuna delle due parti in modo indipendente. Non esiste quindi alcuna forma di interazione strategica, né una descrizione del processo che conduce al contratto finale.

Un primo progresso rispetto ad un'impostazione così meccanicistica è dovuto a Frederik Zeuthen. L'obiettivo del suo modello di negoziazione tra datore di lavoro e sindacati, presentato in *Economic Warfare*¹⁰⁴, è quello di trovare un'unica soluzione allo stesso problema di Edgeworth, la contrattazione fra due agenti.

Zeuthen è cosciente della complessità del calcolo delle forze che determinano un contratto: pur riconoscendo che prevarrà sempre una tendenza definita, la decisione sarà spesso il risultato di una stima di tutte le condizioni rilevanti e anche di elementi irrazionali. Nonostante questa incertezza di fondo, il suo modello tenta una descrizione che anticipa, come mostrerà Harsanyi nel 1956¹⁰⁵, quella che verrà data, all'interno della teoria dei giochi, da Nash negli anni '50. Alle forze determinanti della contrattazione neoclassica, tasso di salario e costi del conflitto, Zeuthen aggiunge un elemento che rende interdipendenti i due agenti: la stima del rischio che l'avversario è in grado di sostenere, che diventa la base su cui effettuare eventuali concessioni. In questo modo il processo di contrattazione diventa funzione dell'interazione strategica fra gli agenti.

Zeuthen considera, all'inizio del processo di contrattazione, una situazione in cui il sindacato chiede un certo salario L_0 e il datore di lavoro offre invece un salario L_1 , minore di L_0 . A questi due salari corrispondono altrettanti valori di utilità, rappresentati dalle funzioni u per il sindacato e v per il datore di lavoro. Si avrà, evidentemente, che:

$$u(L_0) > u(L_1) \quad \text{e} \quad v(L_0) < v(L_1)$$

Per permettere una valutazione dell'alternativa conflitto/accordo, Zeuthen ipotizza che ognuna delle parti sia in grado di stimare la probabilità che l'altra parte rigetti la sua proposta. Sia, per esempio, p_v la probabilità, stimata dal sindacato, che il datore di lavoro rigetti L_0 . Se il sindacato accetta L_1 , ottiene con certezza un'utilità $u(L_1)$; se invece rifiuta L_1 e persevera su L_0 , affrontando un periodo di conflitto, ottiene, con probabilità $(1-p_v)$, il salario $u(L_0)$. Il sindacato accetterà L_1 se:

$$u(L_1) > (1-p_v)u(L_0)$$

mentre rifiuterà L_1 se:

$$u(L_1) < (1-p_v)u(L_0)$$

Quest'ultima disuguaglianza, con una semplice trasformazione, diventa:

$$\frac{u(L_1) - u(L_0)}{u(L_0)} > p_v$$

Il termine di sinistra di questa espressione può essere interpretato come un indice del massimo rischio o della massima probabilità di conflitto che il sindacato è disposto a sopportare. Un valore analogo è calcolabile, rispetto agli stessi salari, per il datore di lavoro:

$$\frac{w(L0) - w(L1)}{w(L0)}$$

che lo confronterà con la sua stima della probabilità con cui il sindacato accetterà il salario L1.

La soluzione del contratto dipende dall'aspettativa che ognuna delle due parti ha sulla forza conflittuale dell'altra. La parte con l'indice di rischio massimo minore sarà indotta dalla sua situazione di sudditanza psicologica a fare una concessione, almeno parziale, all'altra. Se, per esempio, l'indice di massimo rischio del sindacato è maggiore di quello del datore di lavoro,

$$\frac{u(L1) - u(L0)}{u(L0)} > \frac{w(L0) - w(L1)}{w(L0)}$$

sarà il datore di lavoro ad avanzare una nuova offerta più vantaggiosa per la controparte. Questa concessione sarà utile per il datore di lavoro solo se inverte il segno della precedente disuguaglianza, poiché così indurrà il sindacato a fare un'ulteriore concessione. L'alternarsi di offerte si concluderà quando i due indici di massimo rischio diventeranno uguali: il salario corrispondente sarà unico in quanto i lavoratori mostrano una volontà di rischio costantemente decrescente rispetto al salario, mentre l'imprenditore costantemente crescente.

La condizione importante per la determinazione del risultato è data quindi dalla congettura sulla perseveranza dell'avversario, ma questo non è il solo elemento:

The result, however, is only brought about by mutual influences, a special form of the higgling of the market, not by competition, but by threats; and each will try to convince its opponent that its own threats are better founded and more irrevocable than those of the other. Consequently, the point is not merely to know one's own presuppositions and those of the opposite party, for A will only yield gradually as it becomes convinced that B is thinking that it (B) dares run a risk of conflict greater than that which A is prepared to face at the same stage of the negotiations¹⁰⁶.

La stima dell'indice di massimo rischio dell'avversario è un calcolo complesso e le due parti procederanno probabilmente per tentativi. Se questo processo di apprendimento dinamico funziona ed ogni parte conosce il proprio e l'altrui indice di massimo rischio la soluzione è determinata.

Questa descrizione del processo di contrattazione compie un importante progresso rispetto alle precedenti teorie sulla contrattazione, tanto da restare ancora oggi un riferimento fondamentale¹⁰⁷. Dal punto di vista dei successivi sviluppi della teoria dei giochi, gli elementi significativi sono l'introduzione di una rappresentazione di tipo strategico del comportamento degli agenti ed una precisa formalizzazione dinamica del processo di contrattazione. Queste intuizioni devono però attendere la rigorosa presentazione fatta prima da Nash e poi da Harsanyi, negli anni cinquanta, per diventare applicabili più generalmente. Essi dimostreranno infatti che attraverso la teoria dei giochi è possibile discutere formalmente il problema che Zeuthen si limita ad evidenziare, ma che i suoi strumenti matematici non sono in

grado di trattare adeguatamente: la definizione delle 'influenze reciproche' e delle 'minacce' nel processo di contrattazione.

3. LA TEORIA DEI GIOCHI MATEMATICA PRIMA DEL 1944

3.1 Il contributo di Bernoulli alla teoria dell'utilità

In *Theory of Games*, von Neumann e Morgenstern scrivono che la letteratura sette-ottocentesca sui giochi di azzardo¹⁰⁸ non deve essere considerata parte della loro teoria, poiché essa tratta di aspetti "which we have already left behind. This is the appraisal of the influence of chance."¹⁰⁹. In effetti, la ricerca di una soluzione al problema di quale fosse il metodo migliore per lo scommettitore non si era mai proposta di offrire modelli descrittivi del comportamento individuale, ma solo di quantificare le probabilità di vincita e di perdita. Alla teoria del gioco d'azzardo andava assegnata la paternità della teoria della probabilità, per aver rappresentato per più di un secolo il suo unico ambito di applicazione¹¹⁰. Solo agli inizi del '900 un matematico francese, Émile Borel, coglie per primo la relazione esistente tra la psicologia del giocatore ed il comportamento dell'agente economico.

L'edificio teorico di von Neumann e Morgenstern riceve un importante contributo dal lavoro di un altro matematico francese settecentesco: Daniel Bernoulli¹¹¹. Il suo contributo è importante per aver dotato la teoria dei giochi di un elemento essenziale: l'assegnazione di una valutazione numerica alle varie alternative tra cui ogni individuo sceglie in condizione di incertezza. La teoria di Bernoulli rappresenta il primo passo verso un criterio che ordini esattamente le strategie a disposizione di ogni giocatore.

Daniel Bernoulli affronta la questione nel 1738, in un articolo intitolato "Specimen theoriae novae de mensura sortis", cercando di stabilire un criterio per la scelta tra varie scommesse (o lotterie). L'opinione dei primi matematici probabilisti era che un giocatore avrebbe cercato di massimizzare il valore atteso della vincita espressa in denaro. Moltiplicando tutte le possibili vincite associate ad ogni scommessa per il numero di volte in cui esse potevano verificarsi e dividendo la somma di questi prodotti per il numero totale di casi possibili si sarebbe ottenuto il valore atteso della lotteria. Tra tutte le scommesse proposte, il giocatore avrebbe preferito quella con la speranza matematica più alta.

Bernoulli nota che, per accettare questa ipotesi come generale, è necessario ipotizzare che tutti gli individui assegnino ad una certa quantità di denaro lo stesso valore soggettivo. L'evidenza empirica sembra però del tutto diversa: un ricco e un povero valutano in maniera diversa una stessa scommessa¹¹². Ciò che è necessario massimizzare non è il valore monetario atteso della scommessa, bensì quello che Bernoulli definisce il suo valore 'morale'. Ad ogni somma di denaro ogni individuo assegna una certa utilità, che rappresenta il suo criterio di scelta. L'utilità marginale¹¹³ di una vincita viene considerata inversamente proporzionale alla quantità di beni che l'individuo già possiede¹¹⁴. Questa assunzione è equivalente ad affermare che il valore dell'utilità è uguale al logaritmo del valore monetario della ricchezza precedentemente posseduta. Se il vettore $x=(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ rappresenta l'insieme dei risultati possibili della lotteria espressi in termini monetari, che possono verificarsi rispettivamente con probabilità $p=(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n)$, e y è la ricchezza posseduta dall'individuo prima della scommessa, la formula adottata da Bernoulli per risolvere il problema è la seguente:

$$p_i = (y + x_i)$$

Del risultato di questo prodotto, Bernoulli propone poi di estrarre la radice, di grado uguale alla sommatoria di tutti i p_i e di sottrarre infine il valore di y , la ricchezza precedentemente posseduta, definendo così un valore numerico per la lotteria in questione.

Con questo procedimento Bernoulli riesce a risolvere il noto paradosso di S. Pietroburgo¹¹⁵, ma il suo metodo non è esente da critiche: la funzione logaritmica è solo una fra le tante possibili; l'individuo viene considerato in grado di stimare esattamente le probabilità del verificarsi degli eventi presi in considerazione¹¹⁶.

Il contributo di Bernoulli è però innovativo da un altro punto di vista: i criteri di scelta fra alternative rischiose variano da individuo ad individuo. Questa considerazione impone l'abbandono di una teoria strettamente razionale, di tipo normativo, e l'adozione di un'analisi di carattere empirico, che faccia riferimento all'ordinamento individuale delle preferenze¹¹⁷.

Il criterio di scelta fra scommesse alternative di Bernoulli viene abbandonato dalla scienza matematica ed economica successiva, con l'unica eccezione di Laplace¹¹⁸. L'unica sua intuizione che si tramanda al pensiero economico ottocentesco è quella dell'utilità marginale decrescente, che caratterizza l'intera teoria neoclassica¹¹⁹. Sulla base di questo principio, enunciato dalla nota legge di Gossen, gli economisti della scuola soggettivista costruiscono una funzione di utilità unica a meno di una trasformazione lineare. Secondo questa impostazione, l'utilità di un bene viene definita come la capacità dello stesso di soddisfare bisogni e ciò permette di associare a quantità consumabili di beni un valore che ne misura l'utilità totale.

L'evoluzione successiva provoca un distacco ancora maggiore dalla soluzione prospettata da Bernoulli. La critica di Pareto al concetto di utilità cardinale esclude che l'individuo sia in grado di ordinare completamente le varie alternative che fronteggia. Egli può solo, sulla base delle sue sensazioni, avvertire l'intensità del suo bisogno, ma non pronunciarsi sull'ampiezza delle differenze di intensità. Questo rilievo empirico conduce Pareto e gli altri autori della scuola ordinalista ad impiegare un indice di utilità unico a meno di una trasformazione monotona¹²⁰. È infine proprio la riscoperta della teoria di Bernoulli¹²¹ che conduce, nel 1944, von Neumann e Morgenstern a formulare un nuovo indice di utilità che viene impiegato nella teoria dei giochi¹²².

3.2 I precursori matematici della teoria dei giochi

Nel valutare i percorsi storici che conducono ad una nuova teoria è necessario operare una distinzione: vi sono contributi che non potevano essere conosciuti a coloro che elaborano la nuova teoria ed altri che invece gli erano noti. Il giudizio dello storico in questi casi è sempre cauto, non avendo, se non raramente, la certezza di avere effettuato correttamente tale distinzione. Quando comunque esistono elementi affidabili per riconoscere questa differenza, la descrizione storica deve adottare nei due casi un approccio diverso. Se l'apporto del precursore può essere considerato diretto, è necessario andare alla ricerca degli elementi in comune tra i due contributi successivi. Se invece è possibile

presumere che l'opera precedente non abbia direttamente influito sulla teoria seguente, l'opera del precursore assume un significato diverso, non potendo essere valutata in base ad una consequenzialità nel tempo.

Nel caso dei precursori matematici della teoria dei giochi, i due casi delineati sono entrambi presenti. I contributi di Waldegrave e di Steinhaus non erano, quasi certamente, noti ai fondatori della teoria dei giochi, von Neumann e Morgenstern; il lavoro di Zermelo e quello di Borel furono, invece, da essi direttamente conosciuti e sviluppati.

Il contributo di James Waldegrave¹²³ si limita ad una lettera scritta nel 1713¹²⁴ a Pierre de Montmort, uno dei più importanti matematici francesi¹²⁵. L'oggetto della comunicazione di Waldegrave è la determinazione di una soluzione al gioco 'Le Her', le cui regole possono essere desunte da un libro di Todhunter sulla storia della teoria della probabilità¹²⁶. Il gioco si effettua tra due giocatori con un mazzo di 52 carte, ordinate secondo la scala 1,2,3,...,10, fante, donna, re. Vince il gioco colui che estrae la carta più alta. Un giocatore (I) consegna all'altro giocatore (II) una carta a caso e poi estrae una seconda carta che trattiene per sé. Le carte estratte rimangono coperte. Se il giocatore II non è soddisfatto della carta ricevuta, può cambiare la propria carta con quella dell'avversario. Lo scambio non è permesso se il giocatore I ha estratto un re, circostanza che determina la sua vittoria e la fine del gioco. Se invece lo scambio viene effettuato e il giocatore I non è, a sua volta, soddisfatto della carta ricevuta, ha la possibilità di estrarre un'altra carta dal mazzo, deponendovi la sua¹²⁷. Rispettate queste regole, le carte vengono scoperte e vince chi ha la carta più alta, mentre in caso di parità vince il giocatore I.

Attraverso il calcolo combinatorio è possibile individuare i metodi di gioco che assicurano ad ogni giocatore le più alte probabilità di vittoria. Per rappresentarle si può ricorrere alla matrice presentata da Kuhn nella sua discussione dell'articolo di Waldegrave¹²⁸:

	I	
	Trattenere le carte superiori a 7	Scambiare le carte inferiori a 9
I	Trattenere le carte superiori a 6	2828/5525 2838/5525
II	Scambiare le carte inferiori a 8	2834/5525 2828/5525

Waldegrave interpreta la scelta di ogni giocatore come la determinazione della probabilità con cui egli impiega le due alternative possibili. Il giocatore I adotta la prima delle sue strategie selezionate con probabilità $c/(c+d)$ e la seconda con la rimanente probabilità $d/(c+d)$; il giocatore II adotta la prima strategia con probabilità $a/(a+b)$ e la seconda con probabilità $b/(a+b)$. I vari metodi possono così essere messi in relazione tra loro per esprimere la probabilità di vittoria di ogni giocatore. Nel caso del giocatore II questa espressione è uguale a:

$$\frac{2828ac + 2834bc + 2838ad + 2828bd}{13.17.25(a+b)(c+d)}$$

Waldegrave dimostra che, assumendo $a=3$ e $b=5$, qualunque sia la scelta del giocatore I, il giocatore II ha la stessa probabilità di vincita¹²⁹. Per assicurarsi questa 'chance', il giocatore II deve quindi ogni volta estrarre a sorte tra le proprie strategie ottimali, assegnando una probabilità di $3/8$ alla prima strategia e di $5/8$ alla seconda; giocando in una lunga serie il metodo che, di volta in volta, viene estratto egli può assicurarsi una probabilità minima di vittoria indipendente dai valori che l'avversario assegna a c e d ¹³⁰.

Sebbene Waldegrave noti che questo criterio di scelta tra diversi sistemi di gioco non sia usuale¹³¹, egli risolve un problema a cui la matematica probabilistica precedente non aveva saputo dare soluzione: la determinazione di una strategia che minimizzi la massima probabilità di vittoria dell'avversario. L'altro problema, quello di massimizzare le proprie possibilità di vittoria, pur discusso da Waldegrave, non può essere risolto. Nel caso, per esempio, che il giocatore I non adotti nessuna delle sue due migliori strategie, il giocatore II potrà ottenere una probabilità maggiore di vincita adottando un metodo di gioco diverso da quello descritto; ma questo tipo di soluzione conduce ad un 'circolo vizioso', senza consentire conclusioni determinate.

Il risultato ottenuto nel 1713 da Waldegrave è comunque la prima soluzione offerta al problema dell'interazione strategica¹³². Attraverso il concetto di strategia mista, o estratta a sorte, è possibile superare l'indeterminatezza tipica di ogni situazione conflittuale quando ciò non è permesso dall'impiego di strategie pure: un individuo è in grado di assicurarsi un determinato risultato, limitando, senza possibili eccezioni, il migliore risultato ottenibile dall'avversario.

Possono esistere pochi dubbi che l'importanza di questo articolo non fu compresa in questi termini da Waldegrave, che abbandonò molto presto il suo interesse per la teoria della probabilità¹³³. Per trovare un altro riferimento che riprenda questi temi è necessario arrivare all'inizio del '900. Negli anni '20, due matematici di diversa estrazione tentano di risolvere il problema dell'interazione strategica¹³⁴. Il primo è Borel, che richiede per la sua importanza una discussione a parte, l'altro è H. Steinhaus¹³⁵. Il suo articolo "Definition for a Theory of Games and Pursuit", appare per la prima volta nel dicembre 1925 nella rivista *Mysl Akademicka*, edita a Lwów, in Polonia. Steinhaus analizza quelli che egli stesso definisce alcuni tra i problemi irrisolti dalla matematica: il gioco degli scacchi, la ricerca di un sistema ottimale di inseguimento tra due navi e i giochi di azzardo. In tutte queste situazioni è possibile, secondo Steinhaus, applicare uno stesso metodo.

Nel primo caso, gli scacchi, la mossa che ognuno dei due giocatori deve fare è quella che, data una certa posizione sulla scacchiera, gli permette di dare scacco nel minor numero di mosse o di riceverlo nel maggior numero di mosse¹³⁶. Ma la mossa migliore per il Bianco è quella che, dopo la mossa migliore del Nero, gli assicura la posizione più favorevole. L'analisi funzionale non permette di risolvere direttamente questo problema: "now we are in a vicious circle because we have defined the 'best move' of White by the 'best move' of Black"¹³⁷.

Per rompere questo circolo vizioso, Steinhaus introduce una nuova definizione: il 'mode of play'¹³⁸, che rappresenta una lista di tutte le possibili circostanze che possono verificarsi sulla scacchiera dopo la migliore mossa di ciascuno dei giocatori. Se il Bianco ha un 'mode of play' B, e il Nero un 'mode of play' C, il numero di mosse dell'intero gioco, l , è completamente definito da:

$$l = f(B,C)$$

Se B è noto, questa espressione è funzione solo di C. Il Nero deve allora adottare il migliore 'mode of play' C0 in funzione di B, che è quello che gli permette la difesa più lunga:

$$C0 = f1(B)$$

La lunghezza massima del gioco è ora espressa da:

$$l_{max} = f(B, f1(B))$$

Il Bianco deve invece scegliere un 'mode of play' B0 tale che $f(B, f1(B))$ assuma il suo valore minimo: questa scelta gli garantisce che la sua prossima mossa sarà la migliore, poiché

$$l0 = f(B0, f1(B0))$$

è il numero di mosse più basso che il Bianco "can guarantee not to exceed"¹³⁹. Il Nero infatti, scegliendo il 'mode of play' a lui più favorevole, potrà difendersi per un numero di mosse non superiore a $l0-1$.

La stessa tecnica viene usata da Steinhaus anche negli altri due esempi. Trovando i minimi e i corrispondenti massimi di una funzione in due variabili indipendenti, è possibile definire una strategia che garantisce un risultato determinato ad ognuna delle due parti.

La soluzione di Steinhaus al problema dell'interazione strategica coglie quindi esplicitamente la contemporaneità del problema affrontato da due individui in stretta competizione: uno deve massimizzare il suo minimo risultato e l'altro minimizzare il suo risultato massimo¹⁴⁰. Essa è però incompleta rispetto a quella di Waldegrave in quanto non introduce la distinzione tra strategie pure e strategie miste, limitandosi ad adottare una descrizione di tipo funzionale.

Un altro matematico che precorre la teoria dei giochi, ma della cui opera von Neumann era certamente a conoscenza, è Zermelo. In un articolo del 1913¹⁴¹ egli dimostra che il gioco degli scacchi ha sempre una soluzione determinata. Zermelo inverte il metodo seguito da Waldegrave e Steinhaus: la ricerca di una strategia ottimale non deve partire dall'inizio del gioco in avanti, bensì adottare un processo di induzione all'indietro. Nei giochi in cui ogni giocatore conosce le mosse precedenti degli avversari - e gli scacchi rientrano in questa categoria - egli può risolvere il suo problema di scelta associato ad ogni mossa in ordine inverso, a partire dalle mosse che precedono immediatamente quelle finali. Questo principio, se il numero di mosse è finito, può essere applicato a ritroso ad ogni mossa che precede l'ultima. Una catena di funzioni, che nel gioco degli scacchi può essere estremamente lunga ma non infinita¹⁴², permette di determinare la migliore strategia per ogni giocatore. Zermelo non è in grado di mostrare generalmente, a causa del grande numero di combinazioni da considerare, quale sia esattamente la strategia ottimale, ma egli mette in evidenza che il problema è almeno ipoteticamente risolvibile.

Von Neumann viene a conoscenza di questa dimostrazione negli anni '20, e nel 1927 inizia a lavorare su questo argomento, elaborando alcune correzioni, mai pubblicate¹⁴³, all'articolo di Zermelo. In quest'ultimo lavoro sono comunque già chiari sia il concetto di induzione all'indietro sviluppabile nella forma estesa di un gioco, sia l'importanza del ruolo dell'informazione per la determinazione di una soluzione nelle situazioni

di interazione strategica. Zermelo anticipa quindi alcune delle caratteristiche dell'articolo del 1928 di von Neumann sui giochi di strategia¹⁴⁴.

3.3 La teoria dei giochi di Émile Borel

L'opera di von Neumann ha però un altro importante precursore negli anni '20: il matematico francese Émile Borel, che è il primo ad evidenziare l'analogia tra i 'jeux d'habilité' e il comportamento degli agenti economici.

Il riconoscimento del ruolo svolto da Émile Borel¹⁴⁵ nella fondazione della teoria dei giochi è dovuto alla ripubblicazione nel 1953 di alcuni suoi articoli in traduzione inglese¹⁴⁶. Commentandone il contenuto, il curatore, Maurice Fréchet, attribuisce a Borel pochi anni dopo la pubblicazione di Theory of Games il ruolo di 'initiator' della teoria di von Neumann e Morgenstern. Lo stesso von Neumann aveva già scritto, nel 1928, di aver letto un articolo di Borel e di essere riuscito a trovare la soluzione alle questioni sollevate dal matematico francese¹⁴⁷. Il senso quindi da attribuire alla parola 'initiator'¹⁴⁸ è quello di un autore che, come Borel, ha saputo cogliere la natura di un problema, e che, pur non riuscendo a risolverlo, lo ha sottoposto all'attenzione di altri studiosi.

Borel, dopo avere pubblicato nel 1909 un trattato sulla probabilità¹⁴⁹, inizia a studiare, in alcuni articoli scritti tra il 1921 e il 1938, la teoria dei 'jeux où interviennent l'hasard et l'habileté des joueurs'. La sua attenzione si sposta dai puri giochi di azzardo, definibili in base al solo calcolo della probabilità, a quei giochi in cui l'esito finale dipende dalla razionalità del comportamento dei giocatori. E su questo argomento egli offre tre contributi fondamentali:

1) formalizza il concetto di strategia mista, già descritto da Waldegrave;

2) definisce un metodo di gioco che consiste nel minimizzare la probabilità massima di vittoria dell'avversario, come fa quasi contemporaneamente Steinhaus;

3) afferma che le regole dettate per i giochi di strategia possono essere applicate in economia, ed è questo un suo merito autonomo.

I fondamenti della teoria di Borel sono contenuti già nel suo primo articolo sull'argomento, "La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique", pubblicato nel 1921. Borel prende in considerazione un gioco simmetrico¹⁵⁰ a due persone con l'obiettivo di ricercare "un code qui, dans toutes les circonstances possibles (supposés en nombre fini), fixe exactement ce que le jouer doit faire."¹⁵¹. Conoscendo il metodo di gioco Ci, adottato dal giocatore A, e quello Ck, adottato dal giocatore B, è sempre possibile determinare la probabilità di vincita di A, a, e quella di B, b=1-a. Borel esprime questi due valori nel seguente modo:

$$a = \frac{1}{2} + sik \quad e \quad b = \frac{1}{2} + ski$$

$$\begin{aligned} &\text{con } sik + ski = 0 \\ &\text{e } -\frac{1}{2} \leq sik, ski \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Poiché il gioco è simmetrico ($s_{ii}=0$), i coefficienti s possono essere considerati come indici della bontà del metodo di gioco seguito: C_i (C_k) è un metodo definito cattivo se s_{ik} (s_{ki}) è negativo o nullo qualunque cosa faccia B (A). Un giocatore che intenda massimizzare le sue probabilità di vincita eliminerà tutti i metodi di gioco cattivi. Effettuata questa prima semplificazione, l'unico sistema di gioco che assicura un valore di s maggiore o uguale a zero qualunque sia la strategia dell'avversario, non è quello di adottare una sola strategia, ma di estrarre a sorte fra i vari metodi di gioco che non sono stati eliminati. Infatti, se la probabilità con cui A adotta il metodo C_k è p_k e quella con cui B adotta il metodo C_k è q_k e il numero di metodi non eliminati è n , la probabilità di vincita del giocatore A può essere espressa con:

$$a = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (\frac{1}{2} + s_{ik}) p_i q_k$$

Ponendo $\sum p_i$ e $\sum q_k$ entrambi uguali a 1, ipotizzando cioè che i metodi di gioco che vengono adottati siano solo quelli 'non cattivi', l'espressione precedente diventa:

$$a = 1/2 + s$$

in cui:

$$s = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n s_{ik} p_i q_k = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{i-1} s_{ik} (p_i q_k - p_k q_i)$$

Nel caso in cui i metodi di gioco non eliminati come cattivi da entrambi i giocatori siano tre, il termine s può essere espresso attraverso il seguente determinante:

$$s = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ s_{23} & s_{31} & s_{12} \end{vmatrix}$$

Poiché nessuno dei tre metodi di gioco C_i ($i=1,2,3$) è 'cattivo', il determinante mostra che nessuno dei tre è migliore degli altri. Infatti poiché il gioco è simmetrico, non può esistere un metodo di gioco che, qualunque sia la decisione del giocatore B , dia superiorità al giocatore A . E' possibile così trovare dei numeri positivi p_1, p_2, p_3 (con $\sum p_i=1$) tali da annullare il determinante s qualunque siano i numeri q_i ($i=1,2,3$).

Borel mostra quindi che, nel caso particolare $n=3$, esiste un sistema di gioco che, qualunque sia il comportamento dell'avversario, consente di avere una probabilità di vincita uguale a 1/2. Questo metodo è lo stesso che Waldegrave consigliava al giocatore di Le Her: estrarre ad ogni ripetizione del gioco, sulla base di una distribuzione di probabilità p_1, p_2, p_3 , uno tra i metodi buoni, C_i ed adottarlo. In questo modo il giocatore può assicurarsi che non perderà sistematicamente, minimizzando la massima probabilità di vincita dell'avversario, che in un gioco simmetrico assume un valore uguale a 0. Borel non determina perciò il metodo di gioco ottimale, ma quello più sicuro possibile data una situazione conflittuale di interazione strategica. Stabilito così un

limite inferiore alla probabilità di perdita attraverso quello che Borel definisce l'"esprit géométrique", il risultato del gioco dipenderà dall'"esprit de finesse" del giocatore¹⁵².

La regola di Borel, che è valida anche introducendo un'asimmetria tra i giocatori¹⁵³, non è però applicabile se n è maggiore di 3:

Mais il est aisé de voir que, dès que n dépasse 3, cette circonstance ne se présentera que pour des valeurs très particulières des s_{ik} ; (...) nous devons en conclure que le calcul des probabilités ne peut servir qu'à permettre l'élimination des manières de jouer mauvaises et le calcul des s_{ik} ; pour le surplus, l'art du jeu dépend de la psychologie et non des mathématiques¹⁵⁴.

Il limite $n < 4$ all'applicabilità del suo metodo di gioco non viene superato da Borel neppure negli anni successivi. Più volte egli ritorna sulla questione, ma la conclusione è che "la grande multiplicité des cas à examiner"¹⁵⁵ non consente generalizzazioni. Un articolo del 1924 contiene un'ampia trattazione del caso $n=5$, che può essere risolto solo nel caso particolare in cui i minori del determinante, costruito con un criterio identico a quello impiegato nell'articolo del 1921, assumono lo stesso segno. Nel 1926 Borel accenna brevemente al caso $n=7$, scrivendo che i suoi studi in proposito hanno dato un esito negativo¹⁵⁶.

Un problema diverso viene affrontato in un articolo del 1927, che von Neumann dichiara di aver letto preparando la sua dimostrazione del minimax del 1928. Borel si pone la seguente domanda: può il giocatore B scegliere una tattica, tenendo fisse le probabilità con cui estrarre i metodi di gioco non cattivi, e continuarla ad usare anche se l'avversario, A, la apprende nel corso del gioco, oppure per B è conveniente, in quest'ultima eventualità, mutare continuamente le sue probabilità di estrazione? Usando gli stessi simboli dell'articolo del 1921, questo problema può essere rappresentato trasformando l'equazione $s = \sum \sum s_{ik} p_i q_k$ in una forma bilineare attraverso l'espressione $s = \sum p_i Q_i$, dove $Q_i = \sum s_{ik} q_k$. Il giocatore B potrebbe optare per la prima opzione solo se esistessero dei valori q_k , non negativi e non tutti uguali a 0, che rendano nulli tutti i Q_i . In questo modo s si annullerebbe qualunque sia il valore di p_i , e il giocatore B sarebbe certo di non perdere anche nel caso in cui l'avversario dovesse scoprirlo. Borel lascia comunque irrisolto il problema, non riuscendo a determinarne una soluzione né per $n=3$, né per valori di n superiori¹⁵⁷.

La teoria dei giochi di Borel, pur ricca di importanti intuizioni, può essere quindi considerata un'opera incompiuta. Il suo contributo non sarebbe così rilevante come appare alla luce degli sviluppi seguenti se egli non avesse colto la relazione tra i giochi di strategia e il comportamento economico. Una prima affermazione in questa direzione compare nell'articolo del 1921:

Les problèmes de probabilités et d'analyse que l'on pourrait se poser à propos de l'art de la guerre ou des spéculations économiques et financières ne sont pas sans analogie avec les problèmes relatifs aux jeux, mais avec un degré de complication en général bien plus élevé¹⁵⁸.

Nel 1924 Borel scrive che i giochi di abilità offrono l'opportunità di effettuare investigazioni matematiche, le cui applicazioni possono essere estese ad altri ambiti teorici in cui i moventi psicologici convivono con quelli algebrici¹⁵⁹. Infine, nel 1938¹⁶⁰, Borel cita due esempi in cui è possibile applicare le stesse regole dei giochi di

strategia. Il primo è quello di due mercanti che, con lo stesso stock di beni a disposizione, cercano di acquisire clienti attraverso sconti e ribassi di prezzo. Nel secondo esempio due imprenditori, competendo per gli stessi contratti, cercano di massimizzarne il numero distribuendo le loro offerte nel modo più conveniente. Si tratta anche in questo caso di accenni che non ricevono una sistemazione generale, ma che rappresentano il contributo originale di Borel alla moderna teoria dei giochi¹⁶¹.

Questa valutazione dell'opera di Borel non venne condivisa da von Neumann, che, in risposta al commento di Fréchet del 1953, riconobbe al matematico francese solo il merito di aver sviluppato il concetto di strategia, ma non quello di essere stato un 'initiator' della sua teoria, per il suo fallimento nel dare una prova generale del teorema del minimax¹⁶². Per opporsi a questo giudizio è sufficiente considerare¹⁶³ che lo stesso fondamentale articolo del 1928 di von Neumann contiene soltanto riferimenti marginali alle applicazioni economiche¹⁶⁴: è infatti solo con la collaborazione di Oskar Morgenstern, iniziata alla fine degli anni '30, che l'economia inizia a diventare la principale scienza sociale che impiega la teoria dei giochi.

3.4 Economia e matematica all'inizio del '900: un rapporto difficile

L'origine matematica della teoria dei giochi è separata fino al 1944 dall'evoluzione del pensiero economico. L'estraneità fra queste due linee di sviluppo, che trovano una sintesi solo nel libro di von Neumann e Morgenstern, è imputabile al ritardo con cui l'economia assimila le innovazioni metodologiche di inizio '900. Mentre infatti la logica e la matematica subiscono in quegli anni un'importante revisione, l'analisi economica resta strettamente legata all'apparato matematico presentato da Cournot nelle *Recherches*. L'impostazione neoclassica impone, fino alla metà degli anni '30, un'enfasi pressoché assoluta sull'analisi differenziale, il cui impiego è peraltro sempre accompagnato da un approccio 'letterario'. Alla fine dell'ottocento vengono però elaborati nuovi strumenti logici e matematici che non entrano immediatamente a far parte del patrimonio degli economisti. Proprio von Neumann rileva polemicamente questo ritardo, affermando, poco prima della pubblicazione di *Theory of Games*, che "economics is simply still a million miles away from the state in which an advanced science is, such as physics."¹⁶⁵.

La principale novità metodologica ignorata dall'analisi economica di inizio secolo è il programma di Hilbert, che, sviluppando i *Principia Mathematica* di Russell e Whitehead, fonda il moderno metodo assiomatico¹⁶⁶. Sebbene la matematica abbia fatto uso di assiomi fin dalle sue origini euclidee, fino al diciannovesimo secolo la sua natura resta quella di una scienza delle quantità. Ciò presupponeva che ad ogni variabile matematica venisse assegnato un significato reale, con la conseguenza che i concetti adoperati trovavano la loro giustificazione ultima nell'evidenza empirica. E' la scoperta di importanti eccezioni a ciò che appare realisticamente accettabile, e quindi l'affermarsi della coscienza dell'impossibilità di affidarsi al valore evidente dei simboli matematici, che conduce Hilbert a fondare il suo sistema logico. Egli afferma che la validità della matematica non dipende dal significato associabile ai vari termini o espressioni contenuti nei teoremi, né quindi dal contenuto di verità dei postulati o delle tesi, bensì dal fatto che le conclusioni avanzate siano le conseguenze logicamente

necessarie delle ipotesi da cui si è partiti. La matematica deve essere una manipolazione formale di simboli astratti staccata da ogni riferimento intuitivo o significativo e che contiene solo ciò che è stato introdotto esplicitamente. Le catene di postulati e teoremi che caratterizzano un sistema completamente formalizzato non affermano nulla, limitandosi ad evidenziare le relazioni logiche tra le proposizioni. Da questo sistema autosufficiente va tenuta separata la 'metamatematica', che consiste invece nella descrizione e nella discussione della matematica pura. E' questa distinzione che permette, già all'inizio del '900, la fondazione di nuovi strumenti, che, attraverso un più alto livello di astrazione, consentono di ottenere importanti progressi nelle scienze fisiche.

L'introduzione del programma di Hilbert nelle scienze sociali conduce all'adozione di modelli di tipo assiomatico. Le difficoltà che uno scienziato sociale come l'economista incontra nel creare un modello assiomatico sono però superiori a quelle incontrate nella fisica o nella chimica, poiché nel primo caso l'osservazione empirica non può ricorrere al metodo sperimentale. La costruzione di una teoria deve allora fondarsi sulla 'visione del mondo' dell'economista:

Il modello matematico (coerente) richiede, per diventare parte significativa della teoria economica, l'aggiunta di una proposizione che ne affermi la rilevanza rispetto all'interpretazione dei fatti; una proposizione, quest'ultima, non dimostrabile matematicamente e nella quale può incorporarsi la 'visione del mondo' di chi la formula e la corrispondente interpretazione del mondo matematico, in sé neutrale (ma solo banalmente, dal momento che non sarà formulato indipendentemente dalla particolare interpretazione che se ne vuole dare)¹⁶⁷.

L'economia, in quanto scienza empirica, è composta di due parti: in una si costruiscono le strutture logiche, nell'altra si interpreta la realtà, adattando le strutture logiche all'insieme dei dati empirici. La coerenza e il rigore dell'analisi dipendono dalla separazione tra questi due diversi tipi di processi cognitivi. Una teoria nasce da un processo induttivo, che, in base alla 'visione del mondo' dello scienziato, compone un modello interpretativo. Dopodiché l'adozione di un procedimento di carattere assiomatico permette di svincolare l'economista dal ricorso all'intuizione, spesso ingannevole in ambito analitico se condizionata da un continuo riferimento alla realtà empirica, contraddittoria e complessa. E' solo il ricorso a test empirici della teoria che successivamente confuta o conferma i risultati raggiunti.

Nell'analisi economica la comprensione dell'utilità di questo metodo di analisi non è una conquista precoce: il primo modello assiomatico è del 1926, al quale seguono per almeno due decenni solo esempi sporadici¹⁶⁸.

Un altro elemento che, oltre al tradizionalismo metodologico dell'economica neoclassica, spiega questo ritardo è la profonda divisione che permane ancora tra economisti e matematici. La cultura economica appare ancora fondata su metodi di analisi 'letterari', che non rendono necessari un'accurata preparazione matematica per intraprendere la professione di economista. Per esempio, nel 1923, Harold Hotelling non può iscriversi a corsi di economia matematica nell'università di Princeton, destinata a diventare pochi anni dopo la culla della teoria dei giochi:

In going to Princeton I had intended to study mathematical economics and statistics; actually I found there was no one there who knew anything about either subject. I therefore studied the topology, differential geometry, analysis, mathematical physics and astrophysics that Princeton then offered, and all of these have to some extent contributed to my later work¹⁶⁹.

Una situazione simile caratterizza anche gli anni '30¹⁷⁰, dedicati negli Stati Uniti all'analisi dei problemi della depressione e della disoccupazione ed alla realizzazione del programma keynesiano.

La separazione tra matematici ed economisti è presente nelle stesse associazioni professionali statunitensi. Gli economisti matematici fanno parte dell'American Mathematical Society (AMS)¹⁷¹; l'American Economic Association (AEA) è invece ostile alla matematica: la sua rivista, l'American Economic Review, non include articoli che la impiegano in modo approfondito fino agli anni '70¹⁷².

Questa 'conventio ad excludendum' da parte della professione verso l'economia matematica è il motivo principale della creazione, nel 1930, di una nuova associazione, l'Econometric Society¹⁷³, e, nel gennaio 1933, di una nuova rivista, *Econometrica*, che rivestirà un ruolo fondamentale nella diffusione della teoria dei giochi¹⁷⁴. Gli obiettivi della nuova società vengono chiaramente espressi nel suo manifesto programmatico del 1931:

To promote studies that aim at a unification of the theoretical-qualitative and the empirical-quantitative approach to economic problems and that are penetrated by constructive and rigorous thinking similar to that which has come to dominate in the natural sciences. Any activity which promises ultimately to further such unification of theoretical and factual studies in economics shall be within the sphere of interest of the society¹⁷⁵.

L'Econometric Society si propone, da una parte, il superamento della divisione tra gli studi di natura teorica e quelli di carattere statistico, che trova attuazione nell'econometria, dall'altra l'applicazione in economia dei metodi analitici già impiegati nelle scienze fisiche. L'introduzione della topologia e la sostituzione dei principi della meccanica classica con quelli della nuova logica rappresentano proprio il principale risultato dell'opera di von Neumann e Morgenstern, che trova la sua ispirazione più nella storia del pensiero matematico che in quella dell'analisi economica.

3.5 La nascita della teoria dei giochi matematica: l'articolo del 1928 di von Neumann

All'articolo di John von Neumann¹⁷⁶ "Zur Theorie des Gesellschaftsspiele", presentato per la prima volta in una conferenza alla Società Matematica di Goettingen il 7 dicembre 1926 e pubblicato nel 1928, va attribuito il merito di aver fondato matematicamente la teoria dei giochi. Con la dimostrazione del teorema del minimax, von Neumann getta le basi della complessa elaborazione portata a termine in *Theory of Games* e crea una soluzione al problema dell'interazione strategica che rappresenta il punto focale dell'analisi matematica negli anni '50. L'unitarietà di questa evoluzione è chiaramente evidenziata da Aumann:

The two-person zero-sum theory has become an indispensable spawning and proving ground, where ideas are developed and tested in a relatively familiar, 'friendly' environment. These theories could certainly not have developed as they did without minimax¹⁷⁷.

La semplicità del modello creato da von Neumann rappresenta una condizione necessaria per quel progresso graduale richiesto dalla grande novità della sua costruzione. Ciò che differenzia l'impostazione di von Neumann da quella dei predecessori è la novità del suo metodo di analisi. Per la prima volta la descrizione del comportamento degli individui viene affrontata con un modello generale e astratto che permette di caratterizzare in modo univoco una situazione di interazione strategica. Secondo la definizione data da von Neumann, un gioco di strategia è un gioco in cui la sorte (il 'fate') di ogni giocatore dipende non solo dalle sue azioni, ma anche da quelle degli altri giocatori. Ma - si chiede von Neumann - quali sono i suoi elementi fondamentali? Esso consiste di una serie di eventi, ognuno dei quali può avere un numero finito di esiti distinti tra loro. Alcuni eventi dipendono dal caso, che l'individuo non è in grado di influenzare ma rispetto ai quali possiede una stima di tipo probabilistico, altri eventi sono invece il risultato della libera decisione individuale. Gli unici elementi noti sono quale individuo determina un certo risultato e quale è la sua informazione nel momento in cui prende la sua decisione.

Gli elementi inediti in questa definizione sono due: la separazione tra parametri (le probabilità degli eventi determinati dal caso) e incognite (le scelte dei giocatori) e l'introduzione dell'informazione. In base a questa semplificazione, un giocatore è in grado di stabilire una relazione funzionale tra le variabili del gioco e cercare di desumere da essa quale sia il metodo più vantaggioso.

Una semplice formulazione di un gioco di strategia è quella in cui un solo evento dipende dal caso e in cui ogni giocatore i ($i=1,2,\dots,n$) sceglie, segretamente e indipendentemente dagli altri giocatori, un numero y_i da un insieme finito. Von Neumann introduce anche un'ulteriore assunzione, la stessa già adottata da Borel: la sommatoria delle quantità di denaro, g_i , vinte da ogni giocatore alla fine del gioco è nulla, $\sum g_i=0$.

Il comportamento di un giocatore può allora essere rappresentato dalla sua strategia, che consiste in un piano dettagliato che comprende:

- a) una valutazione di tutte le possibili scelte dei giocatori ($y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n$);
- b) una distribuzione di probabilità nota sui possibili risultati, indipendenti tra loro, dell'evento che dipende dal caso (p);
- c) tutte le informazioni sulle azioni dei partecipanti che il giocatore è in grado di inferire o di ottenere (\mathbb{P}).

Questi tre elementi contribuiscono a definire l'ammontare che il giocatore i riceve alla fine del gioco per ogni diversa combinazione di strategie:

$$g_i(y_1, \dots, y_i, \dots, y_n, p, \mathbb{P})$$

Degli elementi che compongono questa funzione, p e \mathbb{P} sono noti per ipotesi e il problema diventa, nelle sue caratteristiche essenziali, quello di stabilire la relazione tra i numeri y e i pagamenti g .

Il caso più semplice in cui questa funzione non degenera¹⁷⁸ è quello in cui $n=2$: il giocatore 1 sceglie x ed ottiene $g(x,y)$, mentre il giocatore 2 sceglie y ed ottiene $-g(x,y)$. Se i giocatori cercano di

ottenere il migliore risultato possibile, 1 tenderà a massimizzare e 2 a minimizzare il valore di $g(x,y)$.

Il giocatore 1 può, comunque si comporti l'avversario, assicurarsi che:

$$g(x,y) \geq \text{Maxx Miny } g(x,y)$$

Se infatti il giocatore 2 sceglie y in modo da rendere minimo $g(x,y)$, il giocatore 1 può determinare x in modo da massimizzare il valore $\text{Miny } g(x,y)$. A sua volta, il giocatore 2 può sempre ottenere:

$$g(x,y) \leq \text{Miny Maxx } g(x,y)$$

Nella situazione ipotizzata, in cui 1 massimizza e 2 minimizza $g(x,y)$, si avrebbe un solo valore di equilibrio se

$$\text{Maxx Miny } g(x,y) = \text{Miny Maxx } g(x,y)$$

Esistono però alcuni casi in cui tale uguaglianza non è vera. Un esempio mostrato da von Neumann è quello del gioco 'Paper, Scissor, Stone'¹⁷⁹, nel quale il giocatore 1 ottiene i seguenti pagamenti finali:

$g(1,1) = 0$	$g(1,2) = 1$	$g(1,3) = -1$
$g(2,1) = -1$	$g(2,2) = 0$	$g(2,3) = 1$
$g(3,1) = 1$	$g(3,2) = -1$	$g(3,3) = 0$

Quando il giocatore 2 determina y in modo da minimizzare $g(x,y)$, il massimo risultato che il giocatore 1 può ottenere è -1 , che rappresenta il Maxx Miny di questo gioco¹⁸⁰. Se il giocatore 2 riesce quindi ad inferire, attraverso la sua intuizione, la scelta dell'avversario, il massimo risultato che il giocatore 1 può assicurarsi sarà -1 . Nel caso in cui sia invece il giocatore 1 ad essere più 'sensitivo' nell'indovinare la strategia dell'avversario, egli potrà assicurarsi il Miny Maxx , che è uguale a 1 . In 'Paper, Scissor, Stone' si ha quindi che

$$\text{Maxx Miny } g(x,y) < \text{Miny Maxx } g(x,y)$$

e i due valori non coincidono. Per superare questa indeterminatezza, von Neumann ricorre al metodo già impiegato da Waldegrave e da Borel. Invece di scegliere un singolo numero, i giocatori devono determinare una distribuzione di probabilità sull'insieme di numeri tra i quali possono scegliere ed adottare una strategia mista. Se 1 adotta la distribuzione e che assegna le probabilità p_1, p_2, \dots, p_n agli n numeri x e 2 la distribuzione μ con probabilità q_1, q_2, \dots, q_n per i numeri y , entrambi i giocatori sono protetti dal pericolo di farsi 'scoprire' dall'avversario¹⁸¹. Il valore atteso del gioco per il giocatore 1 diventa:

$$h(e, \mu) = \sum g(p, q) e_p \mu_q$$

Per 2 tale valore è:

$$-h(e, \mu) = \sum \sum g(p, q) e_p \mu_q$$

Il risultato del gioco è così espresso attraverso una precisa funzione bilineare h , che è lineare in e se μ è fisso e lineare in μ con e fisso. E' questa caratteristica che permette a von Neumann di trovare una soluzione alla questione che Borel aveva dichiarato insuperabile. La

dimostrazione, definita dallo stesso von Neumann "rather involved"¹⁸², è basata sulla condizione di continuità della funzione h e sulle proprietà delle forme bilineari, che consentono di applicare i principi delle strutture matematiche convesse¹⁸³. Con queste ipotesi è possibile dimostrare¹⁸⁴ che la funzione $h(e, \mu)$ ammette un punto di sella: esiste un punto che garantisce ad entrambi i giocatori almeno il valore v , che rappresenta il Maxmin per 1 e il Minmax per 2. Questa unica soluzione può essere definita come il livello di sicurezza che i giocatori possono assicurarsi, come sottolinea esplicitamente Borel¹⁸⁵, e non come la soluzione ottimale del gioco.

Nell'ultima parte dell'articolo, von Neumann analizza i giochi di strategia con tre giocatori. In questa situazione compare un nuovo elemento: la possibilità che due giocatori si coalizzino per imporre al terzo giocatore una certa distribuzione dei pagamenti. Questa eventualità rende impossibile predire un unico risultato del gioco, poiché esistono varie coalizioni possibili. Ciò che si può prevedere è solo un intervallo all'interno del quale è determinabile la soluzione del gioco, e che è limitato inferiormente dal massimo risultato ottenibile da un giocatore isolato e superiormente dal massimo risultato ottenibile da una coalizione con altri giocatori. La definizione di un unico punto all'interno di questo insieme è possibile solo precisando la coalizione effettivamente formata¹⁸⁶. Lo stesso principio vale anche per giochi a più di tre partecipanti, ma von Neumann mette in evidenza come il calcolo della soluzione diventi sempre più complesso con l'aumento del numero dei giocatori e, quindi, delle coalizioni possibili.

L'analisi avviata da Borel trova comunque, per opera di von Neumann, una soluzione, che, seppure limitata per generalità di applicazione, riesce ad impostare la descrizione di una situazione di interazione strategica con un linguaggio affatto nuovo. Dei concetti introdotti nel 1928, alcuni anticipano il successivo Theory of Games: la centralità del minimax nella soluzione dei giochi a n persone¹⁸⁷, lo studio delle coalizioni, la definizione di una funzione caratteristica per il caso a 3 persone e a somma 0, il ruolo dell'informazione in un gioco, interpretabile attraverso i giochi in forma estesa¹⁸⁸. Gli elementi assenti sono proprio quelli che avranno più importanza nell'analisi economica: la rappresentazione dei pagamenti del gioco attraverso una funzione di utilità, e non con valori monetari, e soprattutto l'estensione ai giochi a somma non zero.

3.6 La collaborazione tra John von Neumann e Oskar Morgenstern (1928-1944)

Il 1928 può dunque essere considerato l'anno di nascita della teoria dei giochi. Il lavoro di von Neumann si rivolge però contemporaneamente anche in altre direzioni, nelle quali assume il ruolo di fondatore di importanti aree di ricerca. Relativamente alla matematica, egli offre una presentazione assiomatica della teoria degli insiemi, si occupa di funzioni quasi periodiche, di teoria delle misure e crea una nuova branca della geometria, la geometria continua senza punti. Nel 1932 fonda la meccanica dei quanti, stabilendo una nuova struttura analitica della fisica¹⁸⁹. L'elemento che accomuna questi contributi è rappresentato dall'applicazione del programma scientifico di Hilbert, di cui John von Neumann fu studente negli anni '20¹⁹⁰, che gli consente di affrontare più discipline con un approccio originale.

Un evento che intacca la fiducia di von Neumann in questo metodo di analisi è la pubblicazione, nel 1931, di un articolo di Kurt Gödel¹⁹¹, che confuta la concezione matematica di Hilbert. Secondo quest'ultima teoria è sempre possibile tradurre i postulati di un qualsiasi 'modello' astratto in un'affermazione vera rispetto al modello stesso. Hilbert costruisce perciò delle dimostrazioni 'assolute', che rendono la coerenza di un insieme di assiomi dimostrabile attraverso un numero finito di relazioni interne all'insieme stesso, non ricorrendo cioè alla coerenza di un altro sistema. In base a questo risultato, Hilbert afferma che una dimostrazione assiomatica non può mai essere contraddittoria.

Gödel offre una controprova all'attuabilità di questo programma discutendo un semplice problema aritmetico. La sua analisi mostra che non è possibile dare alcuna dimostrazione di coerenza della formula considerata che ricorra solo a strumenti puramente aritmetici. Sebbene egli non escluda la possibilità di prove extra-aritmetiche (o meta-matematiche, come le definisce Hilbert), la presenza di un'importante eccezione al programma di Hilbert permette di trarre due conclusioni:

(a) non è, in generale, vero che la coerenza di un sistema assiomatico sia dimostrabile senza ricorrere a regole diverse da quelle contenute nel sistema stesso;

(b) un sistema assiomatico è incompleto: esistono sempre proposizioni vere che non sono deducibili dall'insieme di assiomi adottati.

La reazione di von Neumann a questa dimostrazione è drastica: dopo la prova di Gödel egli dichiara di non aver più letto altri trattati di logica simbolica¹⁹², poiché a suo giudizio essa aveva reso il programma di Hilbert 'senza speranze'¹⁹³. Non c'è dubbio però che il giudizio di von Neumann diviene più sfumato nel corso del tempo. Il programma di Hilbert sopravvive infatti all'attacco di Gödel. La sua prova non sovverte l'intero programma, ma un suo principio estremo: il fatto che verità e dimostrabilità siano due concetti coincidenti. Non è più possibile, dopo Gödel, credere che una scienza assiomatica come la matematica possa essere fondata sul nulla, o che sia auto-consistente, perché questa convinzione non garantisce la verità assoluta¹⁹⁴. Negli anni seguenti questa coscienza dell'incompletezza del formalismo matematico si traduce in von Neumann non nell'abbandono del metodo assiomatico, ma nel ricorso all'unica via di uscita da questa, altrimenti inevitabile, 'impasse': l'ispirazione alla realtà empirica. Secondo una recente interpretazione¹⁹⁵, dal 1931 in poi l'opera di von Neumann si caratterizza per una rinnovata attenzione al comportamento dell'individuo ed al funzionamento dei suoi processi mentali. In questa direzione si collocano i suoi studi successivi sui computer e sulla struttura della mente umana, nonché il suo interesse verso le scienze sociali, che assumono gradatamente il ruolo sia di applicazione che di fonte di ispirazione del suo lavoro.

Non è un caso che il primo contributo diretto di von Neumann all'economia prenda forma nell'inverno del 1932, quando egli presenta per la prima volta, a Princeton, il suo lavoro "A Model of General Economic Equilibrium". L'importanza di questo articolo, pubblicato solo nel 1938, è stata ampiamente sottolineata¹⁹⁶: esso rappresenta un importante punto di svolta in economia per la novità degli strumenti matematici impiegati e per l'importanza dei suoi risultati. Von Neumann dimostra l'esistenza di un sentiero di crescita economica bilanciata (nel quale cioè la produzione di tutti i beni cresce ad un tasso omogeneo) e determina qual è il suo tasso di crescita massimo. Dimostra inoltre che su questo

sentiero ottimale: (a) esistono un insieme di prezzi e un tasso di interesse tali che, se essi prevalessero, un'economia competitiva crescerebbe al tasso massimo, e (b) questo tasso di interesse uguaglierebbe il tasso di crescita.

Per dimostrare questo enunciato, von Neumann utilizza nuovamente il teorema del minimax. L'occasione gli è offerta dall'analisi dei processi produttivi. In base alle ipotesi fatte da von Neumann¹⁹⁷, il valore aggregato degli output (scontato indietro di un periodo) deve essere inferiore o uguale al valore aggregato degli input. Ma un tasso di crescita indefinitamente alto provoca eccessi di domanda. Il problema primale del modello è allora quello di stabilire quale sia il massimo tasso di crescita dell'economia compatibile con eccessi di domanda nulli.

In concorrenza perfetta e con libertà di entrata e uscita, è però necessario anche che i profitti siano non positivi. Adottando un orizzonte temporale multiperiodale, ciò equivale a dire che la somma dei valori di tutti gli input al tempo t , calcolati in base al tasso di interesse di mercato, non deve essere inferiore alla somma di tutti i ricavi al tempo $t+1$. E' sempre possibile rendere il tasso di interesse abbastanza basso da generare profitti positivi in almeno un processo. Ma, per gli obiettivi del modello, è necessario determinare, e ciò rappresenta il problema duale, quale sia il tasso di interesse minimo che rende i profitti di ogni processo produttivo non positivi. L'unica soluzione al sistema coincide quindi con un punto di sella, in cui il tasso massimo di crescita uguaglia il tasso minimo di interesse.

La nuova dimostrazione del minimax generalizza quella precedente, impiegando esplicitamente il teorema del punto fisso. Il punto di partenza è, come nel 1928, una funzione bilineare $\mathbb{P}(X,Y)$ ¹⁹⁸, che esprime sia il tasso di interesse che il tasso di crescita del sistema. Affinché esista un punto di sella di questa funzione è necessario che:

- (a) $\mathbb{P}(X,Y')$ assuma il suo valore minimo per Y' se $Y'=Y$
- (b) $\mathbb{P}(X',Y)$ assuma il suo valore massimo per X' se $X'=X$

Si tratta, in altre parole, di dimostrare che il valore di X che risolve (b), dato il valore di Y , può essere usato per generare l' Y che risolve (a), dato il valore di X , e che l'insieme di tutti gli (X,Y) che soddisfano (a) e l'insieme di tutti gli (X,Y) che soddisfano (b) hanno un punto in comune. Questa relazione è una conseguenza del teorema del punto fisso dimostrato da Brouwer nel 1909: data un'applicazione continua di una sfera S , collocata in uno spazio euclideo di dimensione finita, in sé stessa, esiste sempre almeno un punto che ha sé stesso come 'immagine'. Poiché la funzione \mathbb{P} risponde ai requisiti richiesti dal teorema, von Neumann può risolvere il teorema del minimax e concludere la dimostrazione¹⁹⁹.

L'analisi economica diventa quindi negli anni '30 un ambito di ricerca di von Neumann, ma il suo interesse in questa direzione si deve anche alla collaborazione, iniziata alla fine del decennio, con Oskar Morgenstern²⁰⁰. Il ruolo del coautore di Theory of Games nella fondazione della teoria dei giochi non è infatti solo quello di avere suggerito una potenziale applicazione della teoria dei giochi, ma anche di avere influenzato in modo decisivo la concezione economica di von Neumann²⁰¹. Mentre infatti l'articolo sulla crescita di von Neumann rientra a pieno diritto nell'impostazione teorica avviata da Walras, gli interessi di Morgenstern sono, fino dagli anni '20, caratterizzati da un atteggiamento fortemente critico verso la teoria neoclassica. Già nel suo primo libro²⁰², Morgenstern, analizzando le difficoltà della predizione in

economia, scrive che l'analisi neoclassica ignora l'esistenza di due diversi tipi di variabili: quelle morte, determinate solo dal soggetto che le controlla, e quelle vive, che invece riflettono anche la volontà di altri soggetti. In situazioni che comprendono variabili 'vive', esemplificate dal modello Sherlock Holmes-Moriarty²⁰³, la predizione del comportamento di un agente economico è complicata dalla molteplicità dei centri decisionali. Ogni tipo di soluzione che ricorra a strumenti della matematica differenziale, quali la funzione di reazione o le variazioni congetturali, è necessariamente indeterminata; l'unica via di uscita è quella di ipotizzare che l'individuo effettui una decisione arbitraria - a cui Morgenstern dà il nome di strategia - in grado di superare la serie infinita di supposizioni del tipo 'io penso che tu pensi che io penso che...'.

Morgenstern ritorna sull'argomento nel 1935²⁰⁴, evidenziando la contraddittorietà dell'equilibrio economico generale in presenza di interazione strategica. La perfezione teorica del sistema di Walras è permessa dall'assunzione di conoscenza perfetta da parte dei soggetti economici. Questa ipotesi dipende però da due elementi, ignorati dall'analisi neoclassica: il primo è il tempo, che è necessario introdurre esplicitamente²⁰⁵; il secondo consiste nella necessità per ogni agente economico, per cui si assuma informazione perfetta in condizioni di interazione strategica, di tenere conto delle condizioni informative di tutti gli altri agenti. Anche se ogni evento economico è originato da atti individuali, la determinazione dell'effetto di ogni decisione dipende dai comportamenti, presenti e futuri, di tutti gli individui²⁰⁶. La teoria della concorrenza perfetta, ipotizzando informazione perfetta, incorre perciò in un'oggettiva sopravvalutazione delle capacità dell'individuo: ogni agente dovrebbe essere in grado di calcolare sia gli effetti del proprio comportamento su quello altrui che quelli del comportamento altrui sul proprio.

In realtà, questa catena di presupposizioni indefinite si interrompe molto presto²⁰⁷: l'individuo decide il proprio comportamento sulla base di una risoluzione, che è arbitraria solo nel senso che non si basa su funzioni di reazioni congetturali. Essa viene definita in base all'informazione, parziale, che l'individuo possiede. Il principale oggetto d'indagine dell'analisi economica dovrebbe perciò riguardare le modalità con cui l'individuo forma la propria conoscenza e la definizione di quali sono i suoi limiti. Nel sistema di Walras è invece possibile scorgere un errore metodologico: introducendo la previsione perfetta come ipotesi necessaria alla teoria dell'equilibrio, si assume che la scienza economica sia già presupposta nell'oggetto che essa deve indagare, il processo di formazione della conoscenza.

Per Morgenstern è invece necessario un approccio diverso: i limiti cognitivi di ogni individuo gli impongono un processo di adattamento dinamico alla realtà esterna. All'inizio di ogni periodo, gli agenti possiedono opinioni arbitrarie sulla correlazione tra i comportamenti economici. Se queste opinioni si rivelano errate, la strategia conseguente fallisce. Gli agenti rettificano allora le proprie ipotesi fino a quando le loro stime diventano esatte: un loro ulteriore mutamento non provocherebbe più, a quel punto, alcun miglioramento nel benessere individuale. In questo modo l'analisi del comportamento economico diventa meno meccanica e più realistica, includendo sia lo studio delle condizioni di informazione che un recupero del ruolo delle aspettative²⁰⁸; a differenza di quanto accade in Walras, nel modello di Morgenstern è sempre possibile che, per circostanze specifiche o casuali, un individuo possieda aspettative diverse da quelle oggettivamente desumibili in una determinata situazione.

L'ispirazione anti-walrasiana di Morgenstern caratterizza anche la sua visione metodologica. L'inizio della sua carriera coincide con l'affermarsi della scuola viennese di Menger e di Böhm-Bawerk, che propone una logica investigativa fondata su una versione estrema del funzionalismo metodologico, in grado di ridurre tutti gli oggetti teorici alla manifestazione di relazioni tra funzioni. Questa impostazione viene sviluppata da Morgenstern in una direzione che lo porta vicino agli interessi che caratterizzano contemporaneamente l'opera di von Neumann. Nel 1936 Morgenstern interviene sul problema del rapporto tra la nuova logica, formalizzata da Russell e Whitehead ed estesa da Hilbert, e le scienze sociali²⁰⁹. La nuova teoria filosofica permette un progresso significativo rispetto alla logica scolastica o aristotelica. Le leggi della natura, in quanto leggi empiriche, sono di principio fondamentalmente inesatte: il rigore e la coerenza possono essere raggiunti solo usando metodi di ragionamento esatti. La nuova logica - o 'logistics', come la definisce Morgenstern - è una scienza puramente formale, le cui proposizioni sono vere incondizionatamente. In questo modo essa permette di superare i limiti insiti nella mente umana e di riconoscere tutte le implicazioni di un dato insieme di proposizioni. L'analisi economica degli anni '30 è invece, per Morgenstern, ancora centrata su una matematica funzionale estranea agli schemi di tipo assiomatico. Ciò provoca il ripetersi di procedure erranee: l'indebita adozione di esempi e principi mutuati dalla fisica o dalle scienze naturali; l'impiego in modo improprio di una parte della matematica, che viene applicata limitandosi a tracciare simboli di funzioni o a tradurre affrettatamente teoremi economici in espressioni matematiche. Il metodo proposto da Hilbert è invece in grado di risolvere questi problemi, poiché consente di semplificare gli argomenti trattati attraverso l'uso di un linguaggio formale e neutro, che evita analogie imprecise o errori tecnici.

Questi due elementi della formazione di Morgenstern, il rilievo dato al problema dell'interazione strategica e l'innovativa impostazione metodologica, oltre al comune destino di emigrati 'forzati' dall'Europa agli Stati Uniti per l'avvento del nazismo²¹⁰, sono già significativi per spiegare la sua collaborazione con von Neumann. La storia degli eventi che portano a Theory of Games è però anche una singolare collezione di fatti fortuiti e di circostanze inevitabili.

Nel 1935 Oskar Morgenstern viene invitato da Moritz Schlick, il filosofo leader in quegli anni del Circolo di Vienna, a discutere il suo articolo sulla previsione perfetta. Una conferenza sullo stesso argomento si tiene anche, poco dopo, al Karl Menger's Colloquium. In quell'occasione, dopo la discussione,

a mathematician named Eduard Cech came up to me and said that the questions I had raised were identical with those dealt with by John von Neumann in a paper on the Theory of Games published in 1928, the same year that I had published my book on economic forecasting²¹¹.

L'interesse di Morgenstern per la teoria di von Neumann nasce dunque in quella circostanza. La sua frenetica attività di membro della Lega delle Nazioni gli impedisce però di approfondirne la conoscenza. Per lo stesso motivo, nel 1937, Morgenstern non partecipa ad una conferenza tenuta da von Neumann a Vienna sul suo modello di crescita.

Nel gennaio del 1938, Morgenstern si trasferisce negli Stati Uniti in qualità di 'visiting professor' presso alcune università americane.

Von Neumann è diventato nel frattempo membro dell'Institute for Advanced Study di Princeton, dove Morgenstern si reca una prima volta senza incontrarlo.

L'accadimento storico che crea i presupposti della loro collaborazione è drammatico: pochi mesi dopo i nazisti entrano a Vienna e Morgenstern viene espulso dalle università austriache come elemento 'politicamente indesiderabile'. Egli resta quindi negli Stati Uniti, accettando una cattedra a Princeton:

The principal reason for my wanting to go to Princeton was the possibility that I might become acquainted with von Neumann and the hope that this would be a great stimulus for my future work²¹².

Il primo incontro tra von Neumann e Morgenstern avviene subito dopo l'apertura dell'università. A questo primo contatto informale, ne segue un secondo, il 1 febbraio 1939, durante il quale vengono affrontate per la prima volta le questioni che li impegneranno negli anni successivi: il teorema del minimax e la costruzione di un modello di interazione strategica. Nei due anni seguenti le discussioni proseguono con regolarità. Il risultato è che Morgenstern decide di scrivere un articolo con l'obiettivo di diffondere tra gli economisti il significato della teoria dei giochi²¹³. Una prima stesura di questo lavoro viene discussa con von Neumann; quest'ultimo la giudica però troppo sintetica per risultare comprensibile a lettori non esperti degli strumenti matematici impiegati. Morgenstern inizia allora ad estendere il suo articolo. Ma, alla fine del 1940, von Neumann decide di contribuire attivamente al progetto:

When he saw that already greatly enlarged new version, on a memorable day in my bachelor quarters at 12 Nassau Street, which was then the Princeton Bank and Trust Building, he suggested: "Why don't we write this paper together?"²¹⁴

Il primo progetto di collaborazione prevede la composizione di un articolo in due parti. In un secondo tempo, von Neumann e Morgenstern decidono di scrivere un 'pamphlet' da pubblicare sugli Annals of Mathematic Studies. Infine si rivolgono alla Princeton University Press per ottenere un finanziamento per l'edizione di un trattato. Un accordo in tal senso viene preso con il direttore della casa editrice, Datus Smith, che si impegna a pubblicare un libro di circa 100 pagine.

Un problema che viene immediatamente affrontato è quello di come valutare i pagamenti di un gioco. La soluzione adottata da von Neumann nel 1928, i valori monetari, viene abbandonata in favore di un indice di utilità numerica²¹⁵ che Morgenstern si incarica di descrivere in forma assiomatica²¹⁶. Il libro impegna i due autori per oltre due anni, prima a Princeton e poi, dal 1942, a Washington, dove von Neumann entra a far parte dell'ufficio studi della Marina statunitense. Le ultime pagine vengono scritte nel dicembre 1942: la stesura finale ammonta a 1200 pagine dattiloscritte rispetto alle 100 inizialmente previste. Il titolo scelto inizialmente, General Theory of Rational Behavior, viene modificato: Theory of Games and Economic Behavior esce nelle librerie il 18 settembre 1944.

4. THEORY OF GAMES AND ECONOMIC BEHAVIOR

4.1 La metodologia

The revolution has been in method, in the way we think about economic problems. Game theory is a tool, not a product.

(Robert J. Aumann)

L'esito del lungo periodo di collaborazione tra von Neumann e Morgenstern viene descritto in apertura di Theory of Games and Economic Behavior:

The purpose of this book is to present a discussion of some fundamental questions of economic theory which require a treatment different from that which they have found thus far in the literature. The analysis is concerned with some basic problems arising from a study of economic behavior which have been the center of attention of economists for a long time²¹⁷.

Il programma di ricerca avviato da von Neumann con il suo articolo del 1928 si è modificato, tanto da indurre i suoi protagonisti a cambiare lo stesso titolo del loro libro: l'iniziale 'Teoria generale del comportamento razionale' diventa il definitivo 'Teoria dei giochi e del comportamento economico'. Se il punto di partenza del lavoro di von Neumann era la ricerca di principi universali su cui fondare la razionalità del comportamento individuale, il punto di arrivo di Morgenstern e von Neumann è quello di considerare la realtà economica come il principale riferimento empirico e di interpretarla con un linguaggio affatto nuovo.

Il primo passo che uno scienziato deve compiere per costruire una teoria è quello di stabilire una 'similarity', limitata a pochi tratti essenziali, tra il modello che la rappresenta e la realtà che descrive. Questo processo di sintesi conduce nell'analisi economica al cosiddetto 'economic principle', all'idea cioè che l'agente economico massimizzi determinate variabili. Von Neumann e Morgenstern fanno propria questa semplificazione teorica, ma riescono a trarne conseguenze diverse dotandosi di un nuovo strumento: la nuova logica, o 'logistics', ignorata invece dagli economisti contemporanei.

Nel 1941, durante la preparazione di Theory of Games, Oskar Morgenstern descrive le conseguenze di questo ritardo metodologico della teoria economica dominante, quella neoclassica, recensendo Value and Capital con argomenti condivisi anche da von Neumann²¹⁸. Per Morgenstern, il libro di Hicks è poco rigoroso nell'investigazione, non offre direttive per studiare le relazioni tra teoria e investigazioni empiriche ed è un esempio paradigmatico di come l'impiego di strumenti matematici tradizionali provochi continue imprecisioni e scarsa chiarezza²¹⁹. Sebbene Hicks dichiarò di avere dato inizio a una nuova logica economica, questi risultati negativi sono dovuti al fatto che egli non impiegò mai dimostrazioni di tipo assiomatico, che avrebbero potuto aiutarlo ad evidenziare i suoi errori. Nell'affrontare, per esempio, la teoria dell'equilibrio generale, Hicks non coglie un grave difetto della dimostrazione di Walras: l'uguaglianza tra il numero delle incognite e il numero delle equazioni non è una condizione sufficiente per la soluzione

di quel modello²²⁰. Inoltre la sua analisi della teoria dell'impresa, come quella dell'intera teoria neoclassica, non considera né il problema fondamentale dell'interdipendenza strategica²²¹, né il concetto di rischio. La conclusione di Morgenstern, già espressa nel suo articolo del 1936²²², è che per superare questi problemi è necessario adottare un rigoroso metodo assiomatico ed una diversa organizzazione dell'attività di ricerca. L'analisi economica, al pari di ogni altra scienza, deve seguire un processo cognitivo graduale, l'unico in grado di condurre a risultati significativi. Hicks invece pecca di eccessiva ambizione:

There is, undoubtedly, in the different sciences a point when it is still too early to try to apply methods which later on, when the basis has been more firmly established, may prove to be of greatest importance and consequently yield greater results²²³.

Questa raccomandazione di Morgenstern viene riproposta, in termini simili, in Theory of Games:

Economists frequently point to much larger, more burning questions, and brush everything aside which prevents them from making statements about these. The experience of more advanced sciences, for example physics, indicates that this impatience merely delays progress, including that of the treatment of the burning questions. There is no reason to assume the existence of shortcuts²²⁴.

La questione che oppone von Neumann e Morgenstern alla teoria economica di inizio secolo è contenuta nella scelta tra due diverse articolazioni di un programma di ricerca: è più utile seguire un procedimento assiomatico e ottenere prima, attraverso procedure rigorose, risultati scontati e empiricamente non significativi, ottenendo solo successivamente interpretazioni originali; oppure la considerazione della realtà con tutti i suoi molteplici aspetti deve essere oggetto d'attenzione già nella fase iniziale del processo cognitivo? L'analisi neoclassica propende, secondo gli autori di Theory of Games, per la seconda opzione, ma così facendo incorre in gravi errori, per esempio nell'impiego della matematica²²⁵:

a) la formulazione dei problemi economici è imprecisa, tanto da rendere impossibile una traduzione in termini assiomatici;

b) i più semplici strumenti matematici vengono impiegati impropriamente, come nel caso della 'mere counting of equations' di Walras;

c) la definizione dei riferimenti empirici della scienza economica è confusa;

d) le asserzioni vengono spesso scambiate per prove.

Von Neumann e Morgenstern adottano invece la prima alternativa, ispirata a quello che essi stessi definiscono uno 'standard of modesty':

The sound procedure is to obtain first utmost precision and mastery in a limited field, and then to proceed to another, somewhat wider one, and so on²²⁶.

La fondazione di una teoria rigorosa matematicamente e generale concettualmente richiede almeno tre diversi stadi applicativi. Nella prima fase, in cui si colloca Theory of Games²²⁷, le applicazioni devono riguardare modelli elementari, dai risultati non dubbi ed i test empirici hanno il solo scopo di corroborare la teoria. Nello stadio successivo è

possibile analizzare situazioni più complesse, che possono produrre anche risultati non ovvii: ora teoria e applicazione si confermano a vicenda. Solo nella terza fase la teoria può ottenere un reale successo, conducendo ad una 'genuine prediction'.

In un articolo successivo al 1944, Morgenstern offre un esempio di come si realizza concretamente questo programma. L'applicazione dei concetti di dominazione ed imputazione²²⁸ conduce von Neumann e Morgenstern ad ipotizzare una variabilità delle configurazioni sociali possibili. Il passo successivo è l'introduzione dell'idea di 'standard of behavior', con cui è possibile predire, in modo originale, il funzionamento dei 'cartelli' industriali:

in deference to socially accepted standards of behavior they [i cartelli industriali] allow certain outsiders a share in the industry, so as not to attract undue attention - and to be able to point out to the government and the public that 'competition' exists in the particular industry²²⁹.

Il raffronto tra l'osservazione empirica del comportamento dei leader di un 'cartello', che permettono l'entrata nel mercato di imprese di piccola dimensione, ed il concetto di 'standard' di comportamento socialmente accettato conduce ad un'intuizione originale, assente nell'iniziale formulazione matematica.

Strettamente legata alla 'logistics' è l'altra novità del libro, la cui importanza viene già evidenziata da Morgenstern nella sua recensione a Value and Capital. La nuova matematica impiegata da von Neumann e Morgenstern permette di rappresentare due elementi finora inconciliabili: la presunta imponderabilità dell'agire umano in situazioni di interazione strategica e una sua descrizione quantitativa²³⁰. La sintesi è resa possibile dal passaggio dallo studio delle funzioni individuali, proprie degli schemi deterministici della meccanica classica, a quello degli spazi funzionali, analizzati attraverso i nuovi strumenti resi disponibili dallo sviluppo del programma di Hilbert: l'analisi convessa, la topologia, la teoria degli insiemi²³¹. Tra queste nuove strutture interpretative si inserisce anche il recupero della teoria della probabilità²³², che in Theory of Games permette, in presenza di situazioni di 'rischio', di descrivere in termini stocastici il comportamento individuale, allentando quindi l'assunzione di informazione perfetta comune all'intera economia neoclassica.

Questa riscrittura della strumentazione matematica è stata autorevolmente identificata²³³ come il contributo più importante di Theory of Games all'intera economia moderna. Ma anche limitandosi a valutare l'influenza del libro sull'applicazione della teoria dei giochi all'economia, l'impostazione metodologica e matematica di von Neumann e Morgenstern sembra l'elemento che, più degli stessi concetti di soluzione da loro presentati, si perpetua più solidamente nel tempo.

Il più chiaro elemento di continuità teorica presente nel libro di von Neumann e Morgenstern è l'individualismo metodologico della scuola austriaca²³⁴. La loro formazione economica, in particolare quella di Morgenstern, è fondata sul modello di mercato alla 'Robinson Crusoe' descritto da Böhm-Bawerk nel secolo precedente. In quella teoria, che gli autori di Theory of Games definiscono una "valuable qualitative preliminary description"²³⁵, l'agente economico massimizza una funzione di cui conosce il valore di tutte le variabili indipendenti. Lo stesso schema interpretativo diventa però inappropriato quando si voglia tenere

conto delle influenze sociali. Anche se l'obiettivo del singolo agente continua ad essere la massimizzazione di una data variabile, il raggiungimento di questo risultato dipende dal comportamento degli altri membri della società. Da un problema di massimizzazione isolata si passa a uno schema interpretativo molto più complesso, articolato in numerosi modelli di massimizzazione confliggenti tra loro. Una soluzione può allora essere definita solo tenendo conto di due diversi tipi di variabili: quelle 'morte', che sono fisse o determinabili in base a leggi statistiche, e quelle 'vive', il cui valore dipende dalle azioni e dalle volontà di tutti gli agenti. Ciò che permette a von Neumann e Morgenstern di creare un modello economico che, a differenza di quello di Böhm-Bawerk, comprende anche le variabili 'vive' è l'analogia tra i meccanismi di comportamento economico e i giochi di strategia, che rappresenta l'oggetto principale del loro trattato. Ma per addentrarsi nella definizione di questa 'similarità', von Neumann e Morgenstern devono affrontare un problema preliminare: tradurre le vincite di un gioco, espresse in termini monetari, attraverso un valore che esprima il grado di soddisfazione di un agente economico.

4.2 La teoria dell'utilità

Nella teoria dell'impresa, un indice che rappresenta le preferenze di un agente economico può essere fondato sull'economic principle. Se la variabile massimizzata dall'imprenditore è il profitto, allora l'economista dispone di un valore monetario con cui ordinare le diverse combinazioni produttive. Nella teoria del consumo non esiste invece un'analogia variabile oggettiva per misurare le preferenze del singolo individuo. Come Bernoulli, per primo, mette in evidenza, la scelta di un consumatore tra combinazioni alternative di beni non è basata sul valore monetario di questi ultimi, ma sulla soddisfazione o utilità che egli ne ricava. Per superare l'inevitabile soggettività insita in quest'ultimo valore ("all men cannot use the same rule to evaluate the gamble"²³⁶), Bernoulli propone di distinguere gli individui in base alla ricchezza che possiedono.

La teoria dell'utilità di von Neumann e Morgenstern parte dalla soluzione di Bernoulli, ma affronta lo stesso problema in altri termini. Essa rigetta innanzitutto l'idea di poter impiegare uno o più parametri per individuare le differenze di scelta tra gli individui. Le variabili che determinano ogni decisione sono molteplici, tanto da rendere impossibile la definizione di una semplice relazione funzionale. Per costruire un indice di utilità è invece necessario fare riferimento alle scelte di ogni singolo individuo, considerando le sue preferenze prima della caratterizzazione numerica che è possibile assegnare loro. Non è lecito quindi affermare che una combinazione di beni è preferita ad un'altra perché la sua utilità è maggiore, ma solo che, poiché la prima è preferita alla seconda, è possibile assegnarle un più alto valore di utilità.

Questo indice 'a posteriori' viene costruito da von Neumann e Morgenstern seguendo un metodo simile a quello di Bernoulli: l'individuo deve scegliere fra 'lotterie', costituite ognuna da una serie di eventi possibili a cui è associata una certa probabilità²³⁷. Un modello di questo tipo può assumere, secondo lo schema proposto da Knight²³⁸, tre diverse configurazioni:

- a) certezza, se ad ognuna delle lotterie corrisponde un risultato sicuro;
- b) rischio, se una distribuzione di probabilità nota è associabile ai possibili risultati di ogni lotteria;
- c) incertezza, se questa distribuzione di probabilità è ignota.

Von Neumann e Morgenstern limitano la propria analisi all'ipotesi (b) e descrivono con una singola distribuzione di probabilità l'insieme dei risultati delle lotterie prese in esame. Prendendo in considerazione solo due 'lotterie', alla prima delle quali corrispondono due esiti finali, x_1 e x_2 , con probabilità rispettivamente p e $(1-p)$ e alla seconda i risultati x_3 e x_4 con probabilità, rispettivamente, q e $(1-q)$, è possibile rappresentare la situazione di scelta con una singola distribuzione di probabilità. Se infatti si assegna alla prima lotteria una probabilità r e alla seconda lotteria una probabilità $(1-r)$, la distribuzione rilevante per la decisione sarà rappresentata dall'insieme di eventi $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ a cui è associata una distribuzione di probabilità $[rp, r(1-p), (1-r)q, (1-r)(1-q)]$.

Indicando con $p=(p_1, p_2, \dots, p_n)$ e con $q=(q_1, q_2, \dots, q_n)$ due generiche distribuzioni costruite in questo modo e con a un numero reale appartenente all'insieme $[0,1]$, è allora possibile definire $ap+(1-a)q$ come la distribuzione in cui la probabilità dell' i -esimo risultato è $api+(1-a)qi$.

Von Neumann e Morgenstern introducono allora due condizioni. La prima è la stessa di Bernoulli: ogni individuo è in grado di esprimere la sua preferenza tra due alternative. La seconda è invece originale: ogni individuo è in grado di decidere la sua preferenza anche rispetto ad ogni combinazione probabilistica delle due alternative. A questo primo postulato di completezza, gli autori di Theory of Games ne aggiungono altri quattro, elencati nella prima edizione del loro libro e formalizzati nell'appendice della seconda edizione²³⁹.

Il secondo postulato è quello di transitività: preferenza e indifferenza tra 'lotterie' sono relazioni transitive. Questa assunzione può essere contraddetta se l'individuo commette errori di valutazione o se mostra empiricamente, in una sequenza di scelte successive, un comportamento intransitivo²⁴⁰. Nella costruzione di una teoria matematica è però necessario considerare individui coerenti, stabilendo per convenzione di trattare solo i comportamenti di questi ultimi.

Le scelte degli individui devono rispondere anche al principio di monotonicità: una lotteria $[ap, (1-a)q]$ è preferita ad una lotteria $[ap', (1-a)q]$ se e solo se $p > p'$. La conseguenza è che tra due lotterie che comprendono solo l'evento migliore e quello peggiore possibili viene selezionata quella che rende più probabile l'evento migliore.

Il quarto postulato è quello di continuità. Se la distribuzione p è preferita a q e q è preferita a r , allora esiste un numero a , compreso in $[0,1]$ che rende la distribuzione $[ap+(1-a)r]$ preferita a q . Escludendo questo postulato, che per esempio viene meno nelle situazioni in cui esiste un'alternativa considerata inaccettabile, Hausner costruisce nel 1954 un diverso indice di utilità, anch'esso applicabile ai giochi, nel quale al posto di una singola indicazione numerica viene adottata un' n -upla di numeri²⁴¹.

Von Neumann e Morgenstern assumono infine il principio di indipendenza dall'ordine delle alternative. Non è rilevante l'ordine in cui i componenti p e q entrano a far parte di una combinazione probabilistica: $ap+(1-a)q$ è indifferente a $(1-a)q+ap$.

Se la relazione di preferenza soddisfa questi postulati²⁴², il teorema dimostrato da von Neumann e Morgenstern è il seguente: esiste un metodo per attribuire un'utilità u a ciascun risultato finale x , tale che l'utilità assegnata a una lotteria p corrisponde al valore atteso della distribuzione di probabilità dei suoi risultati finali. Moltiplicando le probabilità attribuite ad ogni risultato finale della lotteria per la corrispondente utilità così definita e sommando questi prodotti si determina l'utilità attesa dell'intera lotteria. Una lotteria sarà quindi preferita ad un'altra lotteria se e solo se l'utilità attesa della prima è maggiore dell'utilità attesa della seconda

Nell'ultima parte della dimostrazione von Neumann e Morgenstern dimostrano che se due insiemi di numeri, u e u' , hanno le proprietà definite in precedenza, allora ognuno dei numeri u_i è legato al corrispondente numero u'_i dalla stessa relazione lineare. L'indice di utilità determinato è cioè unico a meno di una trasformazione affine²⁴³.

Quest'ultimo aspetto costituisce un problema per l'obiettivo finale di von Neumann e Morgenstern: rappresentare gli elementi di una matrice di un gioco attraverso questo indice. L'arbitrarietà dell'unità di misura di una funzione di utilità affine impedisce infatti di descrivere con un singolo numero situazioni in cui interagiscono due o più giocatori. Per superare questa difficoltà, von Neumann e Morgenstern devono imporre ai giochi un'ulteriore assunzione: i valori espressi in termini di utilità devono essere sostituibili e liberamente trasferibili tra i vari giocatori.

Il risultato di von Neumann e Morgenstern provoca alcune conseguenze rilevanti. L'utilità di tipo cardinale, criticata dall'approccio ordinalista avviato da Pareto, viene reintrodotta nell'analisi economica. La nuova dimostrazione è fondata sulla soluzione di Bernoulli²⁴⁴, ma von Neumann e Morgenstern offrono un modello che:

gives strong intuitive grounds for accepting the Bernoullian utility hypothesis as a consequence of well-accepted maxims of behavior²⁴⁵.

Negli anni successivi, la letteratura economica sviluppa ampiamente il modello contenuto in Theory of Games, cercando di semplificarne gli assiomi e di estendere la validità²⁴⁶.

Alcuni contributi ricorrono invece a considerazioni di carattere empirico per confutarne le conclusioni²⁴⁷. Il loro principale argomento è che il comportamento effettivo degli individui sembra contraddire le previsioni dell'indice di von Neumann e Morgenstern. La presenza di controesempi empirici ad una teoria non rappresenta però un elemento che ne deve determinare necessariamente l'abbandono. La sua modificazione o la sua estensione possono infatti avvenire principalmente nel dominio proprio della teoria stessa ed in generale è necessario considerare ogni modello teorico sempre come un'approssimazione della realtà.

Un'altra critica viene rivolta al fatto che le probabilità considerate da von Neumann e Morgenstern sono di tipo oggettivo: i pesi con cui ponderare le utilità dei singoli risultati della lotteria sono dati esogenamente. Questa assunzione solleva un problema informativo: ogni individuo deve conoscere tutti gli elementi esterni alla sua teoria e con questa ipotesi tutti gli individui dovrebbero assegnare le stesse probabilità alle alternative considerate. Per superare questa difficoltà, Savage propone nel 1954 un trattamento dell'incertezza che consente di assegnare all'indice di von Neumann e Morgenstern un valore descrittivo oltre che normativo. Nella sua analisi, le probabilità che determinano l'utilità delle lotterie vengono costruite in modo soggettivo: ogni

individuo ha una stima personale sugli 'stati di natura' alternativi che determinano queste probabilità²⁴⁸. In questa versione, l'indice di utilità definito da von Neumann e Morgenstern resta ancora oggi il principale strumento della teoria della scelta del consumatore in condizioni di incertezza.

Nella teoria dei giochi entrambe queste critiche vengono superate attraverso l'introduzione di precise ipotesi sul comportamento dell'agente economico e l'indice di utilità di von Neumann e Morgenstern può essere impiegato per costruire l'analogia tra comportamento economico e i giochi di strategia su cui è fondato Theory of Games and Economic Behavior.

4.3 La teoria dei giochi matematica

La suddivisione interna di Theory of Games presenta uno squilibrio che contraddice, almeno apparentemente, gli obiettivi dichiarati dai suoi autori. L'analisi dei giochi a somma zero occupa infatti due terzi del libro, mentre alla trattazione dei giochi a somma variabile, i più interessanti per l'analisi economica, vengono dedicate solo le 80 pagine finali. La prevalenza di un modello di applicabilità limitata nelle scienze sociali va attribuita al percorso seguito da von Neumann e Morgenstern, che, dopo aver presentato il teorema del minimax ed averne sviluppato alcune applicazioni, estendono questo concetto di soluzione a tutti gli altri tipi di giochi. Il modello a due giocatori con sommatoria dei pagamenti nulla rappresenta quindi l'origine da cui derivano tutte le altre parti del libro. Sia per le interessanti implicazioni matematiche (il teorema del punto fisso e la teoria degli insiemi convessi) che per le applicazioni a cui condurrà (la programmazione lineare, la teoria dell'analisi delle attività, i 'militar games'), il minimax rappresenterà il principale strumento della teoria dei giochi per tutti gli anni '50.

La definizione generale di gioco presentata in Theory of Games riprende lo schema già delineato nel 1928. Un gioco è composto dalla successione di più mosse, effettuate da un numero finito di giocatori ($i=1,2,\dots,n$), e da un insieme di regole prefissate che indicano:

- (a) il giocatore che compie ogni mossa 'personale';
- (b) gli esiti possibili della mossa 'casuale' e l'associata distribuzione di probabilità, determinata da un 'arbitro' impersonale ed esterno al gioco e nota a tutti i giocatori;
- (c) una funzione che associa ad ogni possibile svolgimento del gioco un vettore di pagamenti $g=(g_1,\dots,g_n)$, espressi in termini di utilità.

Rispetto all'articolo del 1928, von Neumann e Morgenstern introducono però una novità: la descrizione esplicita delle condizioni di informazione dei giocatori. Le regole del gioco devono anche determinare l'esito di quali mosse, tra quelle precedentemente effettuate, ogni giocatore conosce nel momento in cui deve effettuare la sua scelta. Questa indicazione, se l'ordine ed il numero delle mosse sono dati²⁴⁹, può essere rappresentata tramite insiemi e partizioni di insiemi. Il tentativo di von Neumann e Morgenstern di costruire un modello di tipo assiomatico ed una descrizione grafica - la forma estesa - dell'informazione associata al gioco non raggiunge però un risultato

soddisfacente²⁵⁰. Anche se in Theory of Games appare il primo grafico di un gioco a forma di albero²⁵¹ una sua definitiva sistemazione deve attendere il lavoro di Kuhn all'inizio degli anni '50²⁵².

Una conseguenza della novità introdotta è comunque rappresentata dalla possibilità di distinguere i vari giochi in base ai tipi generali di informazione che li contraddistinguono. Un gioco viene definito ad informazione completa quando i giocatori sono completamente informati sulle caratteristiche esterne del sistema economico, ed a informazione incompleta nel caso contrario. Limitando la propria analisi al primo caso²⁵³, von Neumann e Morgenstern fanno propria l'ipotesi che caratterizza l'economia ottocentesca. Un'altra distinzione è relativa alla sequenza temporale delle mosse: un giocatore dispone di informazione perfetta se, nel momento in cui deve compiere una certa mossa, conosce l'esito di tutte le mosse precedenti; nel caso contrario, la sua informazione viene definita imperfetta. Nella breve trattazione dedicata ai giochi ad informazione imperfetta, von Neumann e Morgenstern introducono per la prima volta il fenomeno di 'signalling', che rappresenta un modo indiretto, non espresso dalle regole del gioco, di comunicare delle informazioni. Questi stratagemmi, propri dei giochi di carte, saranno oggetto negli anni seguenti di un'ampia letteratura, che ne dimostrerà la rilevanza anche nel comportamento economico e sociale²⁵⁴.

Il concetto fondamentale che consente di rappresentare un gioco a più mosse attraverso una funzione è quello di strategia. Ogni giocatore, invece di compiere tante decisioni quante sono le mosse a lui assegnate dalle regole del gioco, adotta un piano completo di azione. Egli determina in anticipo quale sarà il suo comportamento in occasione di ogni mossa, in funzione di tutte le mosse precedenti e di ogni possibile stato di informazione. Questa semplificazione, che "by no means restrict his freedom of action"²⁵⁵, consente di ridurre la forma estesa di un gioco nella corrispondente forma normale (o strategica). Per giochi a due giocatori, la forma normale corrisponde ad una matrice, che, per il gioco a somma zero 'Paper, Scissor, Stone'²⁵⁶ e per il giocatore 1, è la seguente:

		Giocatore 2		
		1	2	3
Giocatore 1	1	0	1	-1
	2	-1	0	1
	3	1	-1	0

Questa forma di rappresentazione, non presente nell'articolo del 1928 di von Neumann, permette di analizzare un gioco attraverso le regole del calcolo matriciale; esso consente inoltre una più chiara intuizione delle condizioni di interazione strategica:

It has been said that the simple idea of thinking a game in its matrix form is in itself one of the greatest contributions of Game Theory. In facing an interactive situation, there is a great temptation to think only in terms of 'what should I do?'. When one writes down the matrix, one is led to a different viewpoint, one that explicitly takes into account that the other players are also facing a decision problem²⁵⁷.

La prima applicazione data da von Neumann e Morgenstern a questo strumento è la soluzione dei giochi a due persone e a somma zero attraverso il principio del minimax. I giochi di questo tipo vengono definiti strettamente determinati se esiste un punto di sella in strategie pure, come nel caso della seguente matrice 3x3:

		Giocatore 2		
		1	2	3
Giocatore 1	1	3	0	2
	2	-4	-1	3
	3	2	-2	-1

L'elemento (1,2) della matrice, a cui corrisponde un pagamento uguale a 0, rappresenta sia il valore MaxMin per il giocatore 1 che quello MinMax per il giocatore 2. Se è invece necessario ricorrere all'impiego di strategie miste per ottenere un punto di sella, come in 'Paper, Scissor, Stone', il gioco viene definito da von Neumann e Morgenstern non strettamente determinato. In Theory of Games, l'uguaglianza tra i valori MaxMin e MinMax viene dimostrata attraverso un teorema formulato dal matematico francese Jean Ville nel 1938²⁵⁸: per ogni matrice quadrata A, esiste o un vettore di probabilità (riga) x tale che x.A > 0, o un vettore di probabilità (colonna) y tale che A.y < 0; in particolare, se la matrice A è emi-simmetrica²⁵⁹, esiste un vettore di probabilità x per cui x.A = 0. Questo teorema consente di dimostrare il minimax per un gioco simmetrico a somma zero e può essere esteso ad un gioco arbitrario trasformando in modo appropriato la matrice dei pagamenti.

L'interpretazione di von Neumann e Morgenstern della validità del principio del minimax è più esplicita di quella contenuta nell'articolo del 1928. Esso permette solo di individuare le strategie 'buone' in situazioni di conflitto, ma non quelle 'ottime':

while our good strategies are perfect from the defensive point of view, they will (in general) not get the maximum out of the opponent's (possible) mistakes, - i.e. they are not calculated for the offensive. (...) a theory of the offensive, in this sense, is not possible without essentially new ideas²⁶⁰.

Seguendo questo metodo, un giocatore si assicura un pagamento 'sicuro', indipendente cioè dalla strategia seguita dall'avversario. Un tale comportamento può essere definito razionale, in condizioni di interazione strategica, solo se i due giocatori sono ugualmente abili e possiedono entrambi un'informazione completa. Ma l'ottenimento di un 'livello di sicurezza' non si propone per definizione di ottenere un risultato ottimale, che è, a giudizio di von Neumann e Morgenstern, individuabile solo in condizioni diverse da quelle ipotizzate.

L'estensione di questo concetto di soluzione ai giochi con più di due giocatori presenta problemi che, come von Neumann sottolineava già nel 1928, non sono solo di tipo quantitativo. Questo passaggio

"obliterates the pure opposition of interest"²⁶¹, così come la sostituzione di un modello alla Robinson Crusoe con una situazione di interazione strategica rimuove la possibilità di effettuare un puro calcolo di massimizzazione. Per costruire una teoria generale del comportamento razionale diventa necessario considerare la possibilità che i giocatori cooperino tra loro. Il modello di formazione delle coalizioni adottato da von Neumann e Morgenstern ipotizza che ogni giocatore possa effettuare alleanze con uno, o più di uno, degli altri giocatori. Prima dello svolgimento del gioco, i partecipanti si scambiano, senza costi aggiuntivi, una serie di messaggi che specificano i termini della cooperazione e che includono compensazioni, espresse in termini di utilità sostituibile e liberamente trasferibile, atte a 'rafforzare' la coalizione rendendola vantaggiosa per tutti gli aderenti.

La forma più semplice di un modello cooperativo è quella in cui esistono due sole coalizioni complementari, (S) e (-S)²⁶². Con questa ipotesi i due insiemi di giocatori seguono un comportamento razionale adottando la regola del minimax. Definendo come 'funzione caratteristica'²⁶³ di una coalizione S il valore $v(S)$, che rappresenta il pagamento, e quindi la 'forza potenziale', della coalizione, von Neumann e Morgenstern fissano i seguenti assiomi:

- (a) $v(\emptyset) = 0$
- (b) $v(-S) = -v(S)$
- (c) Se S e T sono due generiche coalizioni si ha che:

$$v(S \cup T) - v(S) + v(T) \text{ se } S \cap T = \emptyset$$

La condizione (a) afferma che il valore di una coalizione vuota è zero. La seconda è implicita nell'assunzione di somma zero imposta ai giochi. L'ultima condizione è di super-additività: se la coalizione S può ottenere dai suoi avversari $v(S)$, il valore assegnabile in base al minimax, e non più di questo, e la coalizione T può ottenere non più di $v(T)$, l'unione di S e di T deve potersi assicurare almeno la somma di $v(S)$ e $v(T)$. Ma le coalizioni S e T avranno interesse a cooperare tra loro solo se ciò aumenta il totale dei loro pagamenti:

$$v(S \cup T) > v(S) + v(T)$$

Se questa espressione è vera, il gioco, nella terminologia di Theory of Games, è essenziale e può essere analizzato secondo il modello di formazione delle coalizioni descritto in precedenza.

Per ottenere la soluzione di un gioco essenziale, è necessario trasformare la funzione caratteristica $v(S)$ in una funzione 'ridotta' $v'(S)$ attraverso il concetto di S-equivalenza (o equivalenza strategica). Due funzioni caratteristiche v e v' , calcolate sullo stesso insieme di giocatori, si definiscono S-equivalenti se esistono una serie di numeri costanti a_i (con $i=1,2,\dots,n$), interpretabili come pagamenti ricevuti dai giocatori dopo lo svolgimento del gioco, tali che:

$$v'(S) = v(S) + \sum_{i \in S} a_i$$

per ogni possibile coalizione S.

Se i due giochi contrassegnati da v e v' sono strategicamente equivalenti, essi devono svolgersi con le stesse modalità e dare luogo ad identici pagamenti finali. Devono quindi valere altre due condizioni: la prima è che la sommatoria di tutti gli a_i sia uguale a zero; la seconda è

che la funzione caratteristica ridotta v' assegni ad ogni giocatore isolato un identico valore $-p$:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \sum a_i = 0 \\ (b) \quad & -p = v'((1)) = v'((2)) = \dots = v'((n)) \end{aligned}$$

Con una semplice trasformazione si ottiene:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \sum a_i = 0 \\ (b) \quad & v((1)) + a_1 = v((2)) + a_2 = \dots = v((n)) + a_n \end{aligned}$$

che determina:

$$a_i = -v((i)) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v((i))$$

In questo modo, nel gioco 'ridotto', la funzione caratteristica associata ad ogni coalizione composta da un solo giocatore sarà uguale a $-p$, mentre la funzione associata ad ogni coalizione composta da $(n-1)$ elementi sarà uguale a p^{264} . E' evidente allora che, in un gioco essenziale, p deve essere maggiore di zero, poiché solo così la formazione di coalizioni determina un guadagno netto per i suoi membri. Con tre giocatori la funzione caratteristica assume la seguente forma:

$$v(S) = \begin{array}{ll} 0 & \text{se la coalizione } S \text{ è composta da } 0 \text{ elementi} \\ -p & 1 \\ p & 2 \\ 0 & 3 \end{array}$$

Attraverso il concetto di S -equivalenza è quindi possibile 'normalizzare' la funzione caratteristica: l'insieme di tutte le funzioni caratteristiche possibili viene suddivisa in sottoinsiemi disgiunti, o classi di equivalenza, in ognuno dei quali sono compresi elementi uguali tra loro, e rispetto ai quali due elementi da differenti sottoinsiemi non sono equivalenti. La soluzione di un gioco può adesso essere determinata considerando un solo elemento da ognuno dei sottoinsiemi formati.

Il passaggio finale è quello di definire un criterio di soluzione. Una distribuzione o imputazione del gioco consiste in un insieme di numeri $P=(p_1, \dots, p_n)$, che rappresentano i pagamenti che spettano agli n giocatori. I valori p_i devono soddisfare due proprietà:

$$\begin{aligned} (a) \quad & p_i \geq v((i)) \\ (b) \quad & \sum_{i=1}^n p_i = 0 \end{aligned}$$

In base alla proprietà (a), la soluzione deve rispondere al principio di razionalità individuale: il pagamento ricevuto dal giocatore i deve essere maggiore o uguale di quello che può garantirsi da solo. La proprietà (b) è una conseguenza della condizione di somma zero imposta al gioco. Affinché un'imputazione $P=(p_1, \dots, p_n)$ domini un'imputazione $Q=(q_1, \dots, q_n)$ è necessario che esista una coalizione S tale che:

(a) $p_i > q_i$ per tutti gli $i \in S$

(b) $\sum_{i \in S} p_i \geq v(S)$

Von Neumann e Morgenstern definiscono soluzione del gioco un insieme V di imputazioni che è 'stabile' in due sensi:

(1) Stabilità interna: nessuna imputazione P in V è dominata da un'imputazione Q in V

(2) Stabilità esterna: ogni imputazione Q non in V è dominata da almeno un'imputazione P in V

La definizione precedente può essere espressa con un'unica condizione equivalente:

(1a) Gli elementi di V sono precisamente quelle imputazioni che non sono dominate da nessun elemento di V

Questa definizione di soluzione è quella che, secondo gli autori di *Theory of Games*, interpreta più fedelmente il funzionamento di un'economia e, più in generale, dei sistemi sociali. Le sue caratteristiche sono nettamente diverse da quelle del concetto di equilibrio normalmente impiegato in economia. In primo luogo, questa definizione non è transitiva e non sono quindi i singoli elementi di V , ma solo l'insieme V nella sua interezza a rappresentare una soluzione. Inoltre ogni gioco a n persone possiede molte soluzioni accettabili, che von Neumann e Morgenstern non cercano di ridurre ad un'unica soluzione ottimale²⁶⁵, poiché appartengono tutte, in quanto stabili, allo 'standard of behavior' di una società:

once they are generally accepted they overrule everything else and no part of them can be overruled within the limits of accepted standards. This is clearly how things are in actual social organizations²⁶⁶.

In *Theory of Games* c'è quindi un esplicito riconoscimento dell'impossibilità di pervenire ad una definizione di 'ottimo' nelle scienze sociali, che è dovuta alla molteplicità dei fattori che determinano il prevalere di una configurazione sulle altre. Ogni conclusione più determinata sarebbe necessariamente priva di rigore formale. L'unica via di uscita da questa indeterminatezza è di ricorrere ad elementi esterni al modello: nel caso dell'analisi economica, le variabili politiche, sociologiche o psicologiche. Il problema dell'indeterminatezza di un equilibrio, già lasciato irrisolto da Edgeworth nel suo modello di contrattazione, ottiene così una conferma nell'analisi di von Neumann e Morgenstern, che rinvia ad un approccio multidisciplinare la soluzione dei modelli delle scienze sociali.

Il concetto di soluzione elaborato per i giochi a somma zero viene applicato da von Neumann e Morgenstern a tutti gli altri tipi di giochi. Una prima estensione riguarda quelli a somma costante, nei quali la sommatoria degli n elementi del vettore dei pagamenti finali è uguale ad un numero costante s . Per renderli a somma zero attraverso il concetto di S -equivalenza, è sufficiente determinare gli a_i dell'espressione

$$v'(S) = v(S) + \sum_{i \in S} a_i$$

in modo che:

$$s + \sum a_i = 0$$

L'altra condizione imposta alla funzione caratteristica 'ridotta' resta invariata:

$$-p = v'((1)) = v'((2)) = \dots = v'((n))$$

ed è possibile applicare il procedimento di soluzione definito nel paragrafo precedente.

I giochi che presentano maggiori analogie con la realtà economica sono quelli a somma variabile:

We pointed out before that the zero-sum restriction weakens the connection between games and economic problems quite considerably²⁶⁷.

La circostanza più comune in economia è rappresentata da situazioni non strettamente conflittuali, in cui cioè al guadagno di un agente non corrisponde necessariamente una pari perdita di tutti gli altri agenti. Per estendere anche a questo caso le regole dei giochi a somma zero, von Neumann e Morgenstern introducono un giocatore 'fittizio', che riceve la sommatoria dei guadagni netti di tutti i giocatori 'reali'. Affinché questa finzione teorica non influisca sul risultato finale, è necessario che il giocatore 'fittizio' non prenda parte al gioco: non deve avere proprie strategie, né influenzare in alcun modo la formazione delle coalizioni. Nel linguaggio economico, alla figura del giocatore 'fittizio' può corrispondere il caso di un agente 'socialmente discriminato', il cui pagamento è, per definizione, determinato indipendentemente dalla sua volontà²⁶⁸.

In un gioco a somma variabile in cui si formano solo due coalizioni complementari, le condizioni iniziali da imporre alla funzione caratteristica si riducono a due:

$$(a) \quad v(0) = 0$$

(c) Se S e T sono due generiche coalizioni si ha che:

$$v(S \cup T) = v(S) + v(T) \quad \text{se } S \cap T = \emptyset$$

Un'imputazione del gioco a n+1 giocatori è allora data da:

$$(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n, p_{n+1})$$

Assumendo che al giocatore 'fittizio' spetti il pagamento

$$p_{n+1} = - \sum_{i=1}^n p_i$$

è possibile determinare una soluzione per i giocatori 'reali' impiegando le stesse regole definite per i giochi a somma zero.

Questa trasformazione è però sottoponibile ad una seria critica. Mentre nei giochi a somma zero o a somma costante, che sono strettamente conflittuali, è corretto derivare la funzione caratteristica dall'ipotesi che una coalizione S si opponga ad una coalizione complementare $-S$, lo stesso procedimento è meno convincente nel caso dei giochi a somma variabile. L'idea che la 'forza' di una coalizione possa essere analizzata in base all'ipotesi estrema della formazione di due fazioni opposte non è infatti applicabile a situazioni in cui la cooperazione tra i giocatori può indurre miglioramenti nel benessere sociale non definibili a priori. Per superare questa eccezione, von Neumann e Morgenstern propongono di includere nel processo di contrattazione che precede il gioco "a perfect interplay of threats, counterthreats and compensations"²⁶⁹. La formazione di due fazioni opposte rappresenterebbe allora l'esito più pessimistico, che, in quanto tale, determinerebbe il livello minimo di pagamenti che una coalizione può assicurarsi. Stabilito questo limite inferiore, è sempre possibile attraverso pagamenti collaterali migliorare globalmente il risultato del gioco. Questo processo di compensazione non viene però formalizzato in alcun modo da von Neumann e Morgenstern, che lasciano quindi irrisolto il problema. Essi non affrontano neppure un altro problema che appare centrale in una teoria cooperativa: la definizione delle modalità con cui il pagamento totale attribuito alla coalizione viene suddiviso tra i suoi membri. Aderendo allo 'standard of modesty' che caratterizza Theory of Games, i suoi autori rinviavano anche la soluzione di questo problema alla ricerca successiva²⁷⁰.

4.4 I modelli economici

In Theory of Games, il passaggio dalla teoria alle applicazioni presenta due ordini di problemi. Il primo è imputabile alla centralità del teorema del minimax che limita la capacità interpretativa dell'intera costruzione. Ogni soluzione definisce generalmente due limiti, uno inferiore e uno superiore, che rappresentano la descrizione di una situazione strettamente competitiva. Inoltre il calcolo della funzione caratteristica diventa assai complesso con più di tre giocatori. La traduzione, attraverso il concetto di equivalenza strategica, di una funzione caratteristica in forma ridotta è basata sulla distinzione tra due casi estremi: quello in cui si forma una coalizione che include tutti i giocatori e quello in cui ogni giocatore resta isolato. Se esiste solo una classe di equivalenza intermedia tra questi due limiti, come nel caso $n=3$, il calcolo della soluzione è immediato. Per valori di n superiori diventa necessario introdurre ulteriori semplificazioni per applicare lo stesso procedimento. Qualunque sia comunque il metodo usato, la molteplicità delle configurazioni possibili aumenta molto velocemente rendendo 'senza speranza'²⁷¹ il tentativo di risolvere giochi con più di cinque giocatori. L'unica alternativa percorribile è di restringere l'analisi a classi di giochi particolari, le cui semplici regole consentono di definire una soluzione. Un intero capitolo del libro è dedicato ai 'simple games', nei quali esistono solo due coalizioni, una 'perdente', composta da tutti i giocatori che non formano alcuna coalizione, e una 'vincente', complementare alla prima.

La non generalità della soluzione data ai giochi cooperativi da von Neumann e Morgenstern viene dimostrata negli anni '60 da Lucas²⁷². Ma lo stesso von Neumann, pochi anni dopo la pubblicazione di Theory of Games,

ammette l'esistenza di questo problema, aggiungendo che una teoria generale dei giochi cooperativi può essere fondata solo su una precisa definizione delle regole del gioco, che estenda i principi stabiliti, nel frattempo, da Nash per i giochi non cooperativi:

A class of admissible extensions of the rules of the non-cooperative game would be defined to cover communication, negotiation, side payments, ecc. It should be possible to determine when one admissible extension was 'stronger' than another, and the game correspondingly more cooperative. The goal would be find a 'maximal' extension of rules: a set of rules such that non-cooperative solutions for that game do not change under any stronger set²⁷³.

Il problema principale lasciato irrisolto da Theory of Games appare proprio quello della fase che precede il gioco: la contrattazione che rende possibile la formazione delle coalizioni. Ciò che le applicazioni economiche evidenziano è che il concetto di soluzione di von Neumann e Morgenstern dipende strettamente da una descrizione formale di questa fase, che però appare, a tutt'oggi, difficilmente racchiudibile in un modello teorico generale²⁷⁴. Il 'programma' di Nash rappresenterà negli anni successivi un tentativo importante in questa direzione, fino a diventare il paradigma dominante nella teoria dei giochi economica²⁷⁵.

I modelli economici presentati da von Neumann e Morgenstern sono perciò limitati ai giochi con due o tre giocatori, ai quali si aggiunge solo un breve cenno al mercato competitivo alla Walras. L'opera che essi prendono come riferimento per dimostrare la validità economica della loro teoria non è però l'Eléments d'économie politique pure del maggiore esponente della scuola di Losanna, ma la Positive Theorie des Kapitaless di Eugene von Böhm-Bawerk. Già nel 1925 Morgenstern giudicava positivamente il modello di mercato contenuto in quest'opera, pur ritenendolo incompleto:

I was constantly troubled by the fact that Böhm-Bawerk's theory of bargaining and of the 'marginal pairs', while dealing with fundamentals, could not be considered completed²⁷⁶.

La ricerca di una soluzione a questi problemi aveva contemporaneamente avvicinato Morgenstern allo studio della curva dei contratti di Edgeworth²⁷⁷, che rappresenta l'altra principale fonte di ispirazione dei modelli economici contenuti in Theory of Games.

Nel modello di Böhm-Bawerk, la legge fondamentale che presiede alla formazione del prezzo è che lo scambio di un bene avviene solo se esso avvantaggia entrambi le parti. A questo principio, nel caso di un monopolio bilaterale, corrisponde l'affermazione che un singolo bene viene scambiato solo se il compratore ne stima il valore più del venditore. Il prezzo tende allora a fissarsi entro un intervallo compreso tra un limite superiore corrispondente alla valutazione del compratore e un limite inferiore uguale alla valutazione del venditore.

Von Neumann e Morgenstern descrivono lo stesso modello impiegando la loro teoria. Nel gioco corrispondente, le strategie possibili sono due: scambiare ad un prezzo p o non scambiare. All'unico bene da scambiare corrisponde un valore u della funzione di utilità del venditore (giocatore 1) ed un valore v di quella del compratore (giocatore 2). Dopo avere effettuato la contrattazione, i giocatori ottengono il vettore dei pagamenti $(p, v-p)$ se effettuano lo scambio oppure il vettore $(u, 0)$ se l'accordo non viene raggiunto. Assumendo la stessa ipotesi di Böhm-Bawerk

$(v > p > u)$, von Neumann e Morgenstern arrivano però a risultati diversi. La loro soluzione coincide con l'insieme di tutte le imputazioni $P=(p_1, p_2)$ che soddisfa:

$$\begin{aligned} (a) \quad & p_1 - u, \quad p_2 - 0 \\ (b) \quad & p_1 + p_2 = v \end{aligned}$$

La condizione (a) è quella di razionalità individuale, la condizione (b) corrisponde alla sommatoria dei pagamenti del gioco che è data da $[p+(v-p)]$.

La funzione caratteristica è allora:

$$\begin{aligned} v((1))=u \quad & v((2))=0 \\ & v((1,2))=v \end{aligned}$$

In base all'ipotesi fatta, le parti effettuano lo scambio ed ognuna delle infinite imputazioni contenuta in $v((1,2))$ è una soluzione del gioco, alla quale corrisponde un unico prezzo di equilibrio, $p=v$.

Il risultato di von Neumann e Morgenstern è chiaramente meno accettabile empiricamente di quello di Böhm-Bawerk. Ciò è dovuto al fatto che il concetto di funzione caratteristica è fondato sul teorema del minimax. Se i giocatori adottano questo principio, preferiranno infliggere una perdita all'avversario, piuttosto che effettuare un guadagno: nel caso in questione nessuno scambierà per prezzi inferiori a v . Nel modello di Böhm-Bawerk, un agente economico preferisce invece scambiare con un piccolo guadagno piuttosto che non scambiare affatto. Con un prezzo p maggiore di u e minore di v , il compratore accetta lo scambio perché ottiene $(v-p)$, che è sempre maggiore di zero. Il concetto di funzione caratteristica non è quindi applicabile, secondo l'opinione dei suoi stessi ideatori, a situazioni nelle quali "the setup is simple enough to allow a purely verbal analysis, not making use of any mathematical apparatus"; lo diventa solo se sono presenti "those factors which are inseparable from our theory, but often excluded in the ordinary, verbal approach - coalitions and compensations"²⁷⁸.

Le soluzioni di von Neumann e Morgenstern e di Böhm-Bawerk diventano infatti ugualmente accettabili in mercati più articolati, come nel caso di un monopolio bilaterale in cui vengono scambiate $(1, \dots, s)$ unità dello stesso bene. Per indicare, in questo caso, l'utilità assegnata dalle parti al possesso del bene si può ricorrere a due indici:

$$\begin{aligned} u_0=0, u_1, u_2, \dots, u_t, \dots, u_s \quad & \text{(per il venditore)} \\ v_0=0, v_1, v_2, \dots, v_t, \dots, v_s \quad & \text{(per il compratore)} \end{aligned}$$

che soddisfano il principio di utilità marginale decrescente:

$$\begin{aligned} u_1-u_0 &> u_2-u_1 > \dots > u_s-u_{s-1} \\ v_1-v_0 &> v_2-v_1 > \dots > v_s-v_{s-1} \end{aligned}$$

Nel modello di Böhm-Bawerk, il numero t di unità scambiate è quello oltre il quale entrambe le parti non ottengono più alcun vantaggio. Il prezzo tende allora a fissarsi tra quelle che Böhm-Bawerk definisce le 'coppie marginali': la 'coppia' verso l'alto è composta dall'utilità del numero di unità immediatamente superiore a t per il compratore e dalla corrispondente utilità per il venditore, la 'coppia' verso il basso dall'utilità del numero di unità immediatamente inferiore a t per il compratore e per il venditore. Tra le due delimitazioni, la più stretta è quella vincolante²⁷⁹. Indicando con u_{s-t^*} , v_{t^*} l'utilità massima

ottenibile con lo scambio, rispettivamente, dal venditore e dal compratore, il principio delle 'coppie marginali' determina un intervallo di prezzo d'equilibrio uguale a:

$$\begin{aligned} \text{Max } (us-t^{*+1}-us-t^*, vt^{*+1}-vt^*) &\geq p \\ &\geq \text{Min } (us-t^*-us-t^{*-1}, vt^*-vt^{*-1}) \end{aligned}$$

Trasformando il modello in un gioco, l'imputazione del gioco deve soddisfare le seguenti condizioni²⁸⁰:

$$\begin{aligned} \text{(a')} \quad p_1 - us, p_2 - 0 \\ \text{(b')} \quad p_1 + p_2 = \text{Max}_t (us-t + vt) \end{aligned}$$

La funzione caratteristica è espressa da:

$$\begin{aligned} v((1)) &= us & v((2)) &= 0 \\ v((1,2)) &= \text{Max}_t (us-t + vt) \end{aligned}$$

Il valore $t=t^*$, che massimizza $v((1,2))$, coincide con quello determinato dal principio delle 'coppie marginali' di Böhm-Bawerk, che viene confermato dalla teoria di von Neumann e Morgenstern.

Per determinare il prezzo di equilibrio, p , è necessario considerare che, nel caso di scambio ottimale, il pagamento che spetta al compratore è uguale a:

$$p_2 = vt^* - t^* p$$

Tale pagamento, in base alle condizioni soddisfatte all'imputazione del gioco, è compreso nell'intervallo:

$$0 \leq p_2 \leq (us-t^* + vt^*) - us$$

Unendo le due espressioni precedenti, si ha:

$$\frac{1}{t} (us - us - t^*) \geq p \geq \frac{1}{t} vt^*$$

che è esprimibile, per raffrontarlo con quello determinato da Böhm-Bawerk, come:

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (us-i+1 - us-i) \geq p \geq \frac{1}{t} \sum_{j=1}^t (vj - vj-1)$$

Il raffronto tra i due intervalli di prezzo mostra che essi sono simili. Il secondo è leggermente più ampio²⁸¹, perché il procedimento di soluzione di von Neumann e Morgenstern include la possibilità di compensazioni interne alla coalizione tra venditore e compratore e indica quindi un prezzo medio di scambio, mentre quello di Böhm-Bawerk prende in considerazione un unico prezzo, valido per tutti gli scambi.

Ma il modello economico che consente di apprezzare meglio le potenzialità della teoria dei giochi è quello che include tre agenti. Per Böhm-Bawerk, in un mercato in cui un venditore (giocatore 1) e due compratori (giocatori 2 e 3) assegnano al possesso di un unico bene dei valori, rispettivamente, u , v e w , lo scambio avviene solo se $u < v, w$. In

base al principio delle 'coppie marginali', il prezzo tende a fissarsi entro i seguenti intervalli:

$$\begin{array}{ll} v \geq p \geq w & \text{per } v < w \\ p=v & \text{per } v = w \\ w \geq p \geq v & \text{per } v > w \end{array}$$

Nel corrispondente gioco, la funzione caratteristica è:

$$\begin{array}{lll} v((1)) = u & v((2)) = v((3)) = 0 & \\ v((1,2)) = v & v((1,3)) = w & v((2,3)) = 0 \\ & v((1,2,3)) = w & \end{array}$$

Le condizioni da imporre all'imputazione per determinare una soluzione diventano:

$$\begin{array}{lll} p_1 - u & p_2 - 0 & p_3 - 0 \\ & p_1 + p_2 + p_3 = w & \end{array}$$

Von Neumann e Morgenstern applicano a questo sistema le regole di trasformazione in forma ridotta²⁸², arrivando a conclusioni diverse da quelle di Böhm-Bawerk. Se vale, per esempio, $v \geq w$, la soluzione coincide con le seguenti imputazioni:

- (a) $v \geq p_1 \geq w$, $p_2 = 0$, $p_3 = w - p_1$
- (b) $u \geq p_1 \geq v$, con p_1 e p_2 che sono funzioni decrescenti di p_1 , con $p_1 + p_2 + p_3 = 0$.

Alla soluzione definita da Böhm-Bawerk si aggiunge l'imputazione (b). Nel mercato ipotizzato da Böhm-Bawerk, i due compratori non possono cooperare tra di loro ed il compratore più debole viene sempre escluso dal mercato. Il procedimento di von Neumann e Morgenstern include invece anche questa opportunità: se i due compratori cooperano, possono ridurre il prezzo anche al di sotto di v . Per 'rafforzare' questa coalizione il compratore più forte, 3, può offrire al giocatore 2 una compensazione, p_2 , che è in relazione decrescente con p_1 : più alto è il prezzo a cui 3 acquista il bene, più piccolo è p_2 . La teoria dei giochi consente di tenere conto di un'altra configurazione possibile, quella di monopolio contro duopolio: i due compratori possono, se le loro valutazioni lo permettono, cooperare per arrivare ad una soluzione diversa da quella definita dal principio delle coppie marginali²⁸³.

4.5 La diffusione iniziale tra gli economisti

L'esito più rilevante di Theory of Games appare, in sintesi, quello di avere costruito un nuovo linguaggio per rappresentare concetti e principi già noti nell'analisi economica. L'obiettivo dichiarato da von Neumann e Morgenstern nelle prime pagine del loro libro può essere considerato raggiunto. I limiti nella generalità delle applicazioni della nuova teoria non possono allora essere considerati un vero insuccesso: essi rappresentano solo la prima fase di uno sviluppo che acquisirà una forma definita per opera della ricerca successiva.

Aderendo a questa valutazione, un problema che diventa importante da un punto di vista storico è piuttosto se il nuovo strumento venga

presentato dai suoi autori con sufficiente chiarezza. L'attenzione verso i potenziali lettori del libro è testimoniata dall'estrema cura che viene posta nel rendere il più possibile dettagliati i passaggi logici e matematici. In più punti, von Neumann e Morgenstern si preoccupano addirittura della possibilità che il loro discorso matematico possa apparire 'pedantic'. In effetti, essi discutono ogni aspetto della loro teoria non tralasciando nessun particolare ed evitando quasi sempre il riferimento ad altri testi. La conseguenza inevitabile è quella di allungare enormemente l'esposizione, in particolare nelle parti dedicate alla formalizzazione dei concetti, ed è questo il motivo che, più della presunta complessità delle dimostrazioni matematiche, impegna il lettore.

Le critiche degli economisti che, nel periodo immediatamente successivo alla pubblicazione del libro, sembrano avere completato questo compito si appuntano però su un altro aspetto: non solo Theory of Games rappresenta un superamento dell'intera teoria precedente, ma nelle sue molte pagine mancano quasi del tutto i riferimenti alla letteratura economica. Gli unici autori citati, che fanno parte del 'corpus' dottrinario della disciplina, sono Böhm-Bawerk, Pareto e i due Menger. Questa assenza di un esteso raffronto con l'economia precedente diventa presto un pregiudizio che condiziona l'accettazione del libro da parte degli interpreti della disciplina²⁸⁴.

Più significative appaiono comunque altri tipi di critiche rivolgibili a Theory of Games. Certamente la grande enfasi sui giochi a somma zero rappresenta un limite per l'applicazione della teoria dei giochi all'economia. I modelli economici più frequenti sono infatti rappresentati da situazioni in cui la somma dei possibili guadagni è variabile. Inoltre l'estensione delle regole dei giochi a due persone a quelli a n persone si limita al solo caso 'cooperativo', che non rappresenta la situazione più frequente né nella teoria dell'impresa né in quella del consumo. Una prima svolta che permette il superamento di questi limiti si deve, all'inizio degli anni '50, all'opera di Nash. Anche Nash non supera comunque un altro degli elementi che appaiono di difficile accettazione da parte degli economisti: una definizione di equilibrio che comprende una molteplicità di configurazioni possibili. Questo risultato, già presente nell'analisi di Edgeworth e nella sua teoria della curva dei contratti, resterà per molti anni - e lo rimane anche oggi - una delle critiche rivolte più di frequente alla teoria dei giochi.

Non dovrebbe perciò sorprendere il fatto che il primo elemento che entra a far parte del patrimonio degli economisti sia l'impatto programmatico del libro. L'adozione di un rigoroso metodo assiomatico e l'impiego della nuova matematica diventano gli strumenti con cui, già dall'inizio degli anni '50, l'analisi economica compie importanti progressi anche in settori nettamente distinti dalla teoria dei giochi.

A rendere possibile la diffusione di questi concetti, oltre alla chiarezza con cui essi vengono presentati, è anche l'ampio dibattito suscitato dal libro fin dalla prima apparizione²⁸⁵. Il suo principale protagonista è Oskar Morgenstern, che assume ben presto il ruolo di promotore della nuova teoria. L'impulso gli è dato dallo stesso von Neumann, che, impegnato nella sua intensa attività scientifica multidisciplinare, delega al collaboratore questo compito²⁸⁶. Morgenstern presenta pubblicamente il libro nel maggio 1944 a Princeton e nel giugno dell'anno successivo ad Harvard. Le sue prime impressioni non sono però positive. A Princeton, il relatore viene colpito dal prevalere negli uditori di un pregiudizio di tipo corporativo:

Lutz was hostile and ironic. It appears that he perceives the disagreement the most because he has vested interests in theory. This will be the reaction of most theoreticians²⁸⁷.

Ad Harvard, Morgenstern ottiene un'altra conferma del disinteresse generale:

None of them has read *The Theory of Games* and no one has said anything besides Haberler, who has not read any further. But they will not be able to ignore it because the mathematicians and physicists there, as elsewhere, ought to be very enthusiastic about it²⁸⁸.

Nonostante questi primi insuccessi, a cui ne seguono altri²⁸⁹, Morgenstern prosegue nel suo lavoro di diffusione con una serie di pubblicazioni²⁹⁰ e numerose conferenze. Tanto impegno gli procura anche esiti positivi: il libro ottiene un buon successo editoriale²⁹¹, e intorno alla teoria dei giochi si crea un ampio dibattito.

Sui giornali economici anglosassoni, questa discussione continua senza interruzioni dalle prime recensioni del 1945 fino all'inizio degli anni '50. La maggior parte dei giudizi sono di tono entusiastico. Due sono le linee di valutazione che emergono: alcuni recensori, Hurwicz, Wald e McDonald²⁹², tendono a sottolineare le potenzialità anti-neoclassiche del libro, altri, Copeland, Marschak, Stone, Chacko e Arrow²⁹³, gli effetti profondamente innovatori per la metodologia economica.

La recensione di Hurwicz, che può essere considerata come la più 'leggibile' per gli economisti contemporanei²⁹⁴, mette in evidenza la profonda novità di *Theory of Games* rispetto alla teoria neoclassica. Sebbene anche Hurwicz giudichi il libro lungo e troppo ricco di formalismi²⁹⁵, egli attribuisce grandi potenzialità al nuovo strumento, che appare in grado di risolvere molti dei problemi dell'analisi economica, dalla soluzione del problema del duopolio di Cournot ai limiti insiti nell'adozione del principio di massimizzazione da parte della teoria neoclassica:

It is essentially constructive: where existing theory is considered to be inadequate, the authors put in its place a highly novel analytical apparatus designed to cope with the problem²⁹⁶.

Uno degli elementi che permette questo progresso è il concetto di coalizione, che rappresenta, per Hurwicz, la grande novità del libro²⁹⁷. Mentre infatti in molti modelli economici tradizionali la formazione o l'assenza di coalizioni era semplicemente postulata senza fondare alcuna teoria, von Neumann e Morgenstern offrono una chiara risposta a questa necessaria estensione dell'analisi economica, dalla quale derivano tre importanti risultati: la possibilità di approfondire i meccanismi delle situazioni di collusione, la prova dell'esistenza di soluzioni d'equilibrio che comprendono agenti 'discriminati' e l'invalidamento del sistema di Walras che escludeva la presenza di coalizioni.

Giudizi dello stesso tenore provengono sia da Abraham Wald, che applica negli stessi anni il principio del minimax alla teoria delle decisioni²⁹⁸, che da John McDonald, il quale scrive due articoli divulgativi su un giornale a grande tiratura.

Per Wald, la caratteristica essenziale di *Theory of Games* è rappresentata dalla fondazione della teoria del comportamento razionale non sul principio di massimizzazione ma sulla teoria dei giochi di strategia. Questa innovazione metodologica consente ai suoi autori di

rappresentare quella "peculiar mixture of a number of conflicting maximum problem"²⁹⁹ che caratterizza l'analisi economica. Il giudizio conclusivo di Wald è perciò centrato sull'utilità che le future applicazioni della teoria dei giochi potranno avere:

The reader will be impressed by the deepness of thought and wealth of ideas displayed throughout the book. It goes without saying that sociologists and economists who are interested in a rigorous foundation of the theory of rational behavior will find the book the most interesting and stimulating reading³⁰⁰.

Anche la recensione di Mc Donald individua il 'focus' della teoria dei giochi nella "common fallacy that the rational individual is able to reach an unlimited maximum goal in society."³⁰¹. Ciò che consente a von Neumann e Morgenstern di correggere questo errore è una concezione dell'analisi economica che è "microscopic in contrast to three historic macroscopic systems of Smith (explicit among his followers), Marx and Keynes."³⁰². Al primo, Mc Donald attribuisce la fondazione di quella che è rimasta, a suo giudizio, una pura 'fiction', la teoria della concorrenza perfetta. La teoria di Keynes ha invece evitato di spiegare gli effetti delle combinazioni strategiche tra gli agenti economici, che hanno principalmente il fine di mutare l'andamento 'naturale' del mercato. La scuola marginalista ha infine commesso l'errore di fondare la propria teoria sul principio che ogni individuo cerca, in modo indipendente dagli altri individui, il raggiungimento della propria massima soddisfazione.

Quest'ultima assunzione diventa però particolarmente inappropriata nei mercati oligopolistici, dei quali la teoria neoclassica si è limitata ad evidenziare solo le 'discrepanze' rispetto al caso ideale di concorrenza pura. I tentativi di fondare un'analisi specifica di queste forme di mercato fanno riferimento a due metodi diversi: da una parte è stato privilegiato lo studio della struttura, specificando il numero e la dimensione delle imprese comprese nel mercato, il loro livello di collusione o la presenza di barriere all'entrata, dall'altra si è approfondito la performance dell'impresa, definita attraverso i concetti di produzione, costo, prezzo e innovazione. L'apparato matematico di Theory of Games può consentire l'unificazione di questi due approcci, entrambi incompleti:

In the language of games, "structure" becomes the strategical position and interdependent relationship of the players. Performance becomes the payments made in strategical play. The dualism of structure and performance are thus integrated into the single concept of a game³⁰³.

L'altra linea di valutazione positiva sottolinea la novità della metodologia adottata nel libro. La recensione di Jacob Marschak, pubblicata su The Journal of Political Economy, parte dalla constatazione dello stato insoddisfacente dell'analisi dei mercati competitivi, motivato dalle seguenti considerazioni:

a) le curve di offerta di Walras e quelle dei Principles di Marshall esprimono differenti relazioni causali;

b) la stabilità dell'equilibrio statico viene dimostrata attraverso l'introduzione di postulati dinamici, che influenzano in maniera decisiva i risultati, come avviene per esempio nel modello della ragnatela;

c) questi postulati dinamici non sono fondati empiricamente.

A queste tre cause se ne aggiungono altre nell'analisi dei mercati non competitivi, nella quale è particolarmente evidente la distanza tra la teoria e i fatti.

Per superare queste difficoltà è necessario, secondo Marschak, allargare lo studio delle condizioni di equilibrio a quelle della struttura dei mercati. Ma questa analisi può avere successo solo attraverso una teoria dinamica, che consenta di rappresentare la complessità delle azioni che l'agente economico deve compiere, e non attraverso l'approccio statico, utile solo come prima approssimazione per distinguere le situazioni stabili da quelle instabili. Ma per raggiungere questo obiettivo è necessario rifondare i principi del comportamento individuale ed è questo il merito principale del libro di von Neumann e Morgenstern. Questo risultato viene raggiunto, in primo luogo, sostituendo il concetto di soluzione di un gioco a quello di massimizzazione del profitto; introducendo poi il principio di 'standard of behavior', che permette di razionalizzare la molteplicità delle soluzioni che caratterizza molti modelli economici in presenza di una sostanziale stabilità delle situazioni reali. Col metodo presentato in Theory of Games,

the actual stability of economic situations (where it exists) can be explained partly by appealing to the stability of legal and moral codes, which need not be further specified by the theorist, and partly by properly specifying physical and psychological data, such as differences in individual intelligence or sensitivity³⁰⁴.

Un altro contributo di von Neumann e Morgenstern è il riconoscimento del fatto che ogni agente economico prende le proprie decisioni in condizioni di incertezza. Essi attribuiscono perciò alla teoria della probabilità un ruolo³⁰⁵ che l'analisi economica gli aveva sempre disconosciuto e che può contribuire utilmente al raggiungimento degli obiettivi individuati da Marschak. Theory of Games dimostra infine che le scienze sociali non possono prescindere da un approccio multidisciplinare, l'unico in grado di condurre a predizioni determinate.

Un altro elemento innovativo viene evidenziato da Chacko, che considera tale il ritorno ad un concetto di utilità 'numerica', perché:

there is no return to the 'absolute' element in the oldest concept of utility as the ratio of the two preferences is considered and not even the preference for one event alone³⁰⁶.

Il giudizio complessivo di Chacko è positivo: l'introduzione di un approccio probabilistico consente di rappresentare l'elemento 'speculativo' presente in ogni transazione economica, che è causato dalla necessità di dover prevedere i comportamenti degli altri; la distinzione dei giochi in base alle condizioni di informazione costituisce un metodo scientifico per affrontare realisticamente i problemi economici.

Ad altri aspetti di Theory of Games si interessano Copeland, Stone e Arrow. Per il primo il libro riesce nell'intento di fondare una nuova scienza esatta: 'the science of economics' e questo risultato è dovuto agli strumenti matematici e logici impiegati³⁰⁷. Stone ne apprezza invece la più ampia applicabilità rispetto alla teoria economica precedente e la attribuisce alla nuova metodologia impiegata.

Un primo raffronto presentato da Stone è quello con l'analisi di Walras e di Marshall. Anche se i due autori neoclassici non trascurano gli effetti dell'interazione strategica, i loro sistemi teorici

are built up essentially on the assumptions of perfect competition in which each participant exercises a negligible influence on the total outcome³⁰⁸.

La rimozione dell'assunzione di concorrenza perfetta permette perciò a von Neumann e Morgenstern di svelare molte delle difficoltà che l'analisi economica deve ancora affrontare.

Di Cournot e degli altri teorici della concorrenza imperfetta, Stone critica invece la scarsa rilevanza empirica. L'assunzione che il duopolista fissa il proprio prezzo considerando fisso il prezzo o la quantità prodotta del concorrente provoca due conseguenze che non si riscontrano nella realtà: la grande variabilità dei comportamenti degli agenti economici viene ridotta ad un solo parametro e si prevedono ricorrenti oscillazioni nei prezzi. L'apparato matematico della teoria dei giochi permette invece di costruire modelli più flessibili, in grado di rappresentare con maggiore fedeltà la complessità dei sistemi economici.

Infine la recensione di Arrow nota come il libro fonda i propri risultati sull'introduzione della nuova logica formale³⁰⁹, con cui egli stesso, pochi anni dopo, dimostrerà l'esistenza dell'equilibrio competitivo e il teorema dell'impossibilità della funzione del benessere sociale³¹⁰.

Le posizioni critiche presenti nell'ampio dibattito sollevato da Theory of Games si concentrano su due aspetti: l'eccessivo formalismo del libro e l'assenza di riferimenti economici. Gli interventi di Gumbel³¹¹, Fellner³¹² e Rosenblith³¹³ enfatizzano il primo aspetto; quelle dello stesso Stone³¹⁴ e di Kaysen il secondo. La posizione di Kaysen, esposta in due articoli di cui uno pubblicato su una rivista italiana, Metroeconomica³¹⁵, si estende anche ad alcune questioni sostanziali. In primo luogo egli, anticipando l'analisi più dettagliata di Allais³¹⁶, mostra alcuni esempi che contraddicono la rilevanza empirica dell'indice di utilità di von Neumann e Morgenstern. Kaysen critica inoltre l'accettabilità di una molteplicità delle soluzioni e la coerenza del principio di minimax in condizioni di incertezza³¹⁷.

Ma una chiara testimonianza della distanza che separa la comunità economica statunitense dai contenuti di Theory of Games è la 'discussione' che fa seguito ad una conferenza tenuta da Morgenstern nel 1948. Nel primo intervento, William Jaffé critica la teoria dei giochi con argomenti che dimostrano le sue difficoltà nell'apprendere le argomentazioni di Morgenstern. Il suo giudizio finale è necessariamente sospensivo:

actually no theory of duopoly or oligopoly has been worked out along the lines he suggests. We may grant that his speculation are far from idle and that they are eminently desirable, but for those of us to whom the mathematics of games is still unfamiliar, it is too early to tell³¹⁸.

Nel commento successivo, Martin Bronfenbrenner, dopo aver evidenziato le debolezze la teoria dell'oligopolio di Chamberlin e della Robinson³¹⁹, si rivolge direttamente agli autori di Theory of Games, che propongono un rimedio a quei problemi, sollecitandoli a chiarire i loro argomenti:

to disprove as far as they can the obvious charges of formalism and pyrotechnics which may be leveled against their work. (...) They should

formulate some substantial body of their results in a form susceptible to testing against the received doctrine, and then carry out the tests which are indicated³²⁰.

La critica avanzata è ancora quella di eccessivo formalismo, a conferma della grande distanza che separa gli economisti dai metodi seguiti da von Neumann e Morgenstern³²¹. La conclusione di Bronfenbrenner ne è un'ulteriore dimostrazione. A suo avviso, l'analisi dei mercati di cui tende ad occuparsi la teoria dei giochi è destinata a ricadere nel principio tradizionale della massimizzazione del profitto in quanto le alternative possibili sono solo due: o l'agente economico può ignorare le reazioni degli altri in quanto essi non saranno influenzati dalle sue azioni (in concorrenza perfetta e in mercati con un alto grado di incertezza), oppure l'agente può predire con sufficiente certezza le reazioni degli altri (in un oligopolio con prezzi stabili per leadership o collusione e in monopolio puro)³²².

Nell'Europa continentale, investita dai problemi della ricostruzione post-bellica, le nuove idee di von Neumann e Morgenstern tardano ad affermarsi. La scuola economica che sembra intuire per prima le potenzialità della teoria dei giochi è quella francese³²³. In alcuni scritti apparsi tra il 1949 e il 1951, alcuni studiosi francesi applicano il nuovo strumento ai problemi dell'economia pubblica³²⁴. Di particolare rilievo è il lavoro di Guilbaud, che coglie chiaramente la corrispondenza tra il concetto di soluzione dei giochi a n persone e la curva dei contratti di Edgeworth e attraverso questa intuizione tenta di ridefinire una funzione del benessere sociale³²⁵. Guilbaud avanza anche un'originale critica alla teoria di von Neumann e Morgenstern: in economia, a differenza di quanto avviene nei giochi, non esiste un limite temporale definito. La rimozione di questa finzione teorica rappresenta una condizione necessaria per un'applicazione più generale della nuova teoria. Sulla linea di ricerca tracciata da Guilbaud si impegnano anche altri economisti francesi³²⁶, che discutono le conseguenze della teoria dei giochi sia per il problema dell'aggregazione delle preferenze individuali che per l'analisi dell'oligopolio avviata da Cournot.

4.6 La fortuna critica in Italia

Il resoconto dell'introduzione in Italia della teoria di von Neumann e Morgenstern nel decennio successivo al 1944 è di ampiezza limitata per gli stessi motivi - le conseguenze dell'evento bellico³²⁷ - già rilevati per l'intero pensiero economico europeo. Un nucleo di studiosi interessati alla teoria dei giochi si raccoglie attorno alla rivista *L'industria*, che pubblica nel 1951 la traduzione di uno scritto di Morgenstern e, nell'anno successivo, un articolo introduttivo di De Fenizio³²⁸.

Altri contributi alla diffusione della teoria dei giochi in Italia provengono dagli articoli di tre studiosi, Giovanni Demaria, Bruno de Finetti e Francesco Brambilla, che non riescono però nell'intento di creare un vero e proprio dibattito sulle riviste italiane del periodo.

Il primo studioso italiano a recensire *Theory of Games* è, nel 1947, Giovanni Demaria sul *Giornale degli Economisti*. Il suo articolo affronta direttamente la discussione dei modelli economici proposti da von Neumann e Morgenstern. Nel caso più semplice, quello del monopolio, il giudizio

di Demaria ripete alcune delle considerazioni che animano contemporaneamente il dibattito nella comunità economica anglosassone:

La trattazione matematica di questi casi è tuttavia molto laboriosa ed è assai difficile da intendersi. Dal punto di vista della chiarezza e della semplicità logica, non c'è dubbio che la tradizionale impostazione del monopolio è da preferirsi³²⁹.

Rispetto al modello di monopolio bilaterale, la critica di Demaria appare ancora più netta, oltre che rivelatrice delle difficoltà incontrate nell'affrontare il libro:

Tutto ciò è familiare in dottrina. L'apparato teorico degli autori nulla aggiunge ad essa tranne un nuovo insieme, formale e laborioso, di espressioni concettuali assai difficili a comprendersi a chi non voglia o non abbia la grande pazienza di leggersi il lunghissimo libro dove le nuove espressioni concettuali sono a lungo elaborate³³⁰.

Nella discussione di Demaria, una critica non puramente formale viene presentata solo affrontando il modello economico con tre giocatori ed in questo caso egli elabora un'analogia originale. L'indeterminatezza dell'equilibrio definito da von Neumann e Morgenstern per i giochi strettamente determinati - quelli che ammettono un punto di sella in strategie pure - viene paragonata da Demaria alla soluzione del duopolio data da Cournot. Mentre l'economista francese arriva a determinare un equilibrio determinato, la teoria dei giochi deve ricorrere all'impiego delle strategie miste per ottenere un risultato analogo. Per Demaria, questo rappresenta un insuccesso, poiché egli, erroneamente, giudica questo tipo di situazione 'trasparente', come se ogni giocatore fosse in grado di prevedere la scelta dell'altro. A suo giudizio, sono i giochi non strettamente determinati ad essere caratterizzati da incertezza, perché in essi l'individuo possiede solo una conoscenza parziale, o probabilistica, del comportamento dell'avversario. La dottrina tradizionale assume quindi un atteggiamento corretto considerando indeterminato questo modello, mentre von Neumann e Morgenstern dimostrano l'esistenza di un unico equilibrio con un procedimento che non convince Demaria:

La nostra impressione è che il punto di sella rientri nelle tante misure artificiose da cui, praticamente, qualunque risultato può trarsi. Il problema dipende dal numero delle variabili introdotte e perciò può portare alle più varie forme di determinazione e di indeterminazione³³¹.

Le principali riserve di Demaria riguardano proprio il metodo seguito da Theory of Games, che, seppure basandosi su considerazioni teoriche di 'indubbio fondamento', non riesce ad ottenere risultati più generali di quelli della dottrina tradizionale³³².

Pochi anni dopo Demaria sembra mutare giudizio. Nel 1954, la sua valutazione diventa meno critica:

A mio avviso, la teoria dei giochi non è per ora applicabile ai complicatissimi problemi dell'equilibrio economico generale, i quali richiedono una impostazione analitica assai complessa. Sì, invece, per molteplici questioni di equilibrio economico particolare, specie quando si tratti di ricercare il valore razionale del gioco e delle probabilità delle mosse di due soli individui od operatori i quali dispongono di un

numero limitato di scelte, sempreché esistano approssimativamente o completamente le condizioni di matrici 'a somma zero'³³³.

Nel caso per esempio di un oligopolio in cui si stabilisce una situazione puramente conflittuale, l'apparato teorico creato da von Neumann e Morgenstern può essere applicato con risultati positivi. L'accurata presentazione del teorema del minimax e dei metodi per calcolarlo, che Demaria fa seguire a questa affermazione, è una conferma del suo mutamento di giudizio.

Un sostenitore incondizionato della validità della nuova teoria è invece Francesco Brambilla, autore di una serie di articoli pubblicati sulla rivista *Tecnica ed Organizzazione*. Gli aspetti del libro che Brambilla giudica più rilevanti sono l'applicabilità empirica della teoria dei giochi³³⁴ e la sua assoluta novità concettuale. Egli coglie con precisione il significato del rivolgimento teorico provocato da *Theory of Games*: mentre l'economia tradizionale fa coincidere il comportamento razionale dell'agente economico con il principio di massimizzazione, nella nuova teoria le azioni di ogni individuo dipendono da più variabili, alcune delle quali non gli sono note. La coscienza di questo limite impone di abbandonare le facili soluzioni proposte dalla teoria neoclassica:

Orbene, osservano gli autori citati, una tale situazione non può essere in alcun modo definita come problema di massimo, comunque si imposti il problema, nel senso tradizionale della parola. Ci troviamo cioè di fronte ad una situazione logico-matematica che né la matematica né l'economia aveva sinora saputo rappresentare logicamente³³⁵.

Brambilla si impegna poi nel non facile compito di presentare sinteticamente gli strumenti matematici della teoria dei giochi. Egli supera questa prova, potendo contare su una buona perizia logico-matematica: la sua è la prima chiara esposizione in lingua italiana di concetti come quelli di giochi a somma zero e di giochi generali, e di forma normale ed estesa di un gioco³³⁶.

L'ultimo studioso italiano che discute ampiamente la teoria dei giochi è Bruno de Finetti, che si interessa già dagli anni '30 ai problemi della teoria della probabilità e della decisione. Le sue prime critiche si appuntano perciò sull'indice di utilità di von Neumann e Morgenstern. Rispetto a questo problema, egli auspica l'abbandono del concetto di probabilità oggettivo a favore di una visione soggettivista. Per quello che attiene alla modellizzazione dei fatti economici, de Finetti discute con grande lucidità, in alcuni scritti pubblicati tra il 1952 e il 1955³³⁷, le caratteristiche del nuovo approccio. La teoria dei giochi propone la sostituzione del principio di stabilità a quello di equilibrio, adottando un criterio più realistico per lo studio delle scienze sociali. Nello stesso tempo, questa modificazione è un'esplicita dichiarazione di impotenza da parte dello scienziato rispetto al tentativo di arrivare a predizioni univocamente determinate. E' per questa ragione che un merito di von Neumann e Morgenstern diventa un motivo di polemica verso la sua introduzione nella scienza economica³³⁸. Ciò che consente a de Finetti di dissociarsi da questo dissenso generalizzato è l'idea che il nuovo strumento permetta, attraverso per esempio una continua rimodulazione delle regole del gioco, di reimpostare criticamente molti dei problemi che la teoria economica tradizionale aveva creduto risolti con i metodi dell'analisi differenziale.

L'accoglienza italiana alla teoria dei giochi è contenuta tutta in questi pochi cenni e ciò rappresenta certamente uno dei motivi del suo scarso successo anche negli anni successivi al 1959. Un giudizio più articolato può provenire dall'esame di una produzione letteraria che solo negli ultimi due decenni ha assunto in Italia una certa consistenza. Si tratta comunque di una storia appena iniziata ed una sua ricostruzione appare ancora prematura.

5. LA TEORIA DEI GIOCHI E L'ECONOMIA TRA IL 1944 E IL 1959

5.1 La comunità scientifica

Il programma di ricerca avviato da Theory of Games viene sviluppato nei quindici anni successivi alla sua pubblicazione da una comunità di studiosi interamente nuova. Alcuni giovani matematici ed economisti raccolgono l'invito di von Neumann e Morgenstern e fanno progredire la nuova metodologia oltre i limiti imposti dallo 'standard of modesty' adottato dai suoi fondatori. I notevoli risultati che vengono raggiunti negli anni '50, almeno dal punto di vista matematico, si devono alla creazione di un ambiente in cui i singoli ricercatori possono confrontare e discutere tra loro i rispettivi contributi. Quello che accade negli Stati Uniti tra il 1944 e il 1959 in questa comunità scientifica è una conferma dell'idea che la conoscenza scientifica possa crescere velocemente solo attraverso un'intensa collaborazione tra i suoi interpreti. Se è vero che nella storia del pensiero economico la comprensione delle linee di sviluppo predominanti di un certo programma di ricerca deve sempre passare dalla conoscenza del contesto in cui esso si afferma, nel caso qui trattato questa esigenza assume un'importanza eccezionale.

Il primo evento che preannuncia la formazione di una nuova comunità scientifica è la fondazione dell'Econometric Society. Fino dagli anni '30 questa associazione diventa il riferimento principale per coloro che propugnano l'impiego di modelli matematici nell'analisi economica ed il confronto di questi ultimi con la realtà empirica. Non è quindi casuale che sia proprio l'Econometric Society ad ospitare per prima, nelle sue conferenze annuali, comunicazioni relative alla teoria dei giochi, ignorata negli stessi anni dall'American Economic Association³³⁹. Nella conferenza del settembre 1948, von Neumann e Morgenstern presentano i contenuti del loro libro. Il primo tiene una relazione intitolata "Survey of the Theory of Games", Morgenstern discute invece le relazioni tra "Economics and the Theory of Games"³⁴⁰. Nel 1949, il convegno annuale dell'Econometric Society dedica un'intera sessione alle 'Extensions of the theory of games', nella quale Leonid Hurwicz presenta un paper sui rapporti tra politica economica e aspettative riformulati attraverso la teoria dei giochi mentre Oskar Morgenstern discute il problema della complementarità nella teoria della domanda³⁴¹. Dopo questi primi riconoscimenti ufficiali, l'Econometric Society continua a riservare un ampio spazio agli studiosi della teoria dei giochi per tutti gli anni '50³⁴².

Se l'Econometric Society rappresenta il principale ambito di diffusione della nuova metodologia, l'attività di ricerca si concentra in altre due istituzioni, che danno luogo ad una nuova comunità scientifica dalla originale impostazione teorica. La prima di queste associazioni è la Cowles Commission creata nel settembre 1932 dallo speculatore di borsa Alfred Cowles, che già aveva finanziato la costituzione dell'Econometric Society. Dopo alcuni anni di permanenza nello stato del Colorado, la Cowles Commission si trasferisce nel 1939 a Chicago, città posta in quegli anni al centro del vasto sistema di trasporti statunitense³⁴³. Ma la svolta decisiva per la successiva evoluzione di questa associazione si verifica quando la sua direzione viene assegnata a Jacob Marschak, uno

tra i tanti europei trasferitisi negli Stati Uniti dopo l'avvento del nazismo.

L'emigrazione oltre oceano degli studiosi più stimati del vecchio continente è un fenomeno così ampio da provocare una vera e propria rivoluzione nella scienza economica statunitense. I nuovi arrivati, la cui cultura è spesso profondamente diversa da quella dei colleghi anglosassoni, riescono in pochi anni ad occupare posizioni di rilievo nel panorama scientifico statunitense³⁴⁴. Alcuni economisti (Fellner, Hayek, Mises, Machlup e Haberler) diffondono negli Stati Uniti la teoria austriaca; un'altra scuola impegnata nella ricerca sui problemi dello sviluppo economico viene fondata da Joseph Schumpeter; un terzo gruppo, infine, si raccoglie attorno a Menger, che in un primo momento fissa la propria residenza a Notre Dame, nell'Indiana, per trasferirsi poi a Chicago. Oltre a Von Neumann e Morgenstern, possono essere considerati allievi di Menger un folto numero di economisti matematici europei, tra cui emergono i nomi di Haavelmo, Koopmans, Lange, Tintner, Wald, Leontjef e, appunto, di Marschak.

Quando quest'ultimo diventa, nel 1942, direttore della Cowles Commission³⁴⁵, questa associazione riformula il proprio programma di ricerca, aderendo al progetto teorico avviato dall'Econometric Society. La ricerca, secondo Marschak, deve adottare un metodo di analisi fondato sulle quattro caratteristiche principali della teoria economica e dei dati statistici disponibili:

- (a) la teoria è sempre un sistema di equazioni simultanee e non una singola equazione;
- (b) queste equazioni comprendono di solito termini stocastici;
- (c) la maggior parte delle rilevazioni empiriche è in forma di serie temporali;
- (d) i dati che vengono pubblicati sono generalmente in termini aggregati³⁴⁶.

Tenendo conto di questi principi, la Cowles Commission deve proporsi di elaborare una serie di tecniche di misurazione dei fatti economici che consentano di fondare una scienza dell'econometria. Contemporaneamente, essa deve adottare il metodo assiomatico che consente di elaborare modelli matematici rigorosi sottoponibili a test³⁴⁷.

Il lavoro dei ricercatori che fanno parte della Cowles Commission viene articolato da Marschak in modo da realizzare questo progetto³⁴⁸. Negli anni '40, l'associazione comprende quattro diversi gruppi di ricerca: Marschak e Koopmans, il fondatore dell'analisi dell'attività, si occupano degli aspetti statistici della ricerca economica; Lawrence Klein approfondisce i problemi di tipo macroeconomico; Haavelmo, il padre dell'econometria moderna, studia il 'model testing'; Leonid Hurwicz viene incaricato di approfondire e diffondere la teoria dei giochi³⁴⁹. Proprio quest'ultimo, mentre gli altri membri della Cowles Commission proseguono nel decennio successivo su altri percorsi teorici³⁵⁰, rappresenta il 'trait d'union' con l'altra associazione, la RAND Corporation, che sviluppa il programma avviato da von Neumann e Morgenstern.

La fonte di finanziamento che consente la nascita di questo istituto di ricerca è il bilancio militare degli Stati Uniti. Il progetto di dotare l'esercito statunitense di un organismo di ricerca scientifica prende corpo alla fine del 1944, quando il generale Henry Harley Arnold scrive a Theodor von Kármán, un rifugiato ungherese, chiedendogli di studiare la possibilità di creare una base militare a Santa Monica dedicata allo studio delle potenzialità belliche dell'Air Force. Tredici

mesi dopo, von Kármán e il suo Army Air Force Scientific Advisory Board presentano il programma 'Towards New Horizons', che rappresenta l'atto di nascita ufficiale della Research AND Development³⁵¹.

La natura puramente militare dell'associazione viene ridimensionata all'inizio del 1947. Due membri della RAND Mathematical Division, Olaf Helmer e John Davis Williams, interessati alla teoria dei giochi, promuovono la fondazione di due nuove divisioni RAND, una dedicata all'economia ed una seconda alle scienze sociali. Williams contatta von Neumann e gli offre di unirsi al progetto: nel dicembre del 1947, il padre della teoria dei giochi entra nella RAND come 'part-time consultant', contribuendo a creare quella stretta relazione tra la teoria dei giochi e la ricerca militare che caratterizzerà l'intero decennio successivo³⁵².

La particolare atmosfera che si crea alla RAND dopo l'arrivo di von Neumann viene descritta da Kenneth J. Arrow, che vi trascorre un breve periodo nell'estate del 1948:

There was a whole group of game theorists and a lot of emphasis on game theory. Von Neumann himself descended from 'heaven' every now and then to visit us. Everyone sat up in great awe; he was pretty impressive, I can tell you that!³⁵³

Le sensazioni del giovane Arrow³⁵⁴ trovano conferma nell'intensa attività che si svolge all'interno dell'associazione californiana. In un documento riservato³⁵⁵, datato 13 luglio 1949 e curato da Melvin Dresher e Lloyd S. Shapley, che riepiloga i risultati della ricerca della RAND sulla teoria matematica dei giochi, si elencano più di 100 paper e 'technical memoranda' prodotti tra il settembre 1947 e il maggio 1949 da circa quaranta ricercatori.

L'enorme lavoro svolto dai ricercatori della RAND è però concentrato quasi totalmente sui giochi a due persone e a somma zero. Alcuni storici hanno di recente considerato questo elemento un fattore che ha condizionato negativamente l'applicazione della teoria dei giochi alle scienze sociali³⁵⁶. Il doversi affidare esclusivamente a fondi di origine militare avrebbe provocato negli anni '50, secondo queste ricostruzioni, un cambiamento di direzione nell'attività di ricerca in senso contrario alla sua estensione all'economia. Indubbiamente nel periodo successivo alla pubblicazione di Theory of Games l'evoluzione della politica estera statunitense contribuisce a rendere il modello puramente conflittuale proposto da von Neumann e Morgenstern particolarmente interessante. La 'guerra fredda' diventa il principale argomento di discussione negli Stati Uniti e le relazioni USA-URSS si prestano facilmente ad essere interpretate secondo lo schema dei giochi a somma nulla. Ma l'estesa analisi dedicata a Theory of Games dovrebbe avere reso chiaro che il ruolo centrale del minimax nella teoria dei giochi degli anni '50 è dovuto al percorso metodologico seguito da von Neumann e Morgenstern più che all'influenza delle organizzazioni di carattere militare.

L'importanza del ruolo svolto dalla RAND Corporation può essere apprezzata in una prospettiva diversa se si considerano anche altri aspetti. La linea teorica più feconda per l'economia, quella avviata dal lavoro di Nash, viene fondata all'inizio degli anni '50 e si sviluppa all'interno della RAND e di altre organizzazioni finanziate dal bilancio militare degli Stati Uniti³⁵⁷. Inoltre in quegli anni i fondi militari rappresentano l'unica fonte di finanziamento del lavoro di ricerca. La quota percentuale del totale delle risorse destinate dal bilancio federale alla voce Ricerca & Sviluppo assegnata agli enti militari cresce

dal 25% del 1935 al 90% del 1943³⁵⁸. L'adesione ad associazioni di questo tipo rappresenta quindi, in un'economia ancora provata dalle conseguenze della grande crisi, l'unico modo concreto di continuare a sopravvivere attraverso il solo lavoro intellettuale³⁵⁹. Queste associazioni diventano così un centro di attrazione per gli studiosi di tutte le scienze sociali che, entrando a fare parte di comunità di ricerca dalla composizione assai variegata, possono sviluppare le loro teorie secondo schemi multidisciplinari. Non sembra azzardato affermare che la stessa profonda integrazione tra studiosi di scienze diverse non sarebbe stata possibile senza questo punto di riferimento comune e, almeno apparentemente, neutro. Negli anni '50 si assiste infatti ad un'estesa applicazione della teoria dei giochi a tutte le scienze sociali. Un primo sviluppo riguarda proprio i 'military games'³⁶⁰, che diventano in breve tempo uno strumento operativo attivamente impiegato dall'esercito statunitense. Le conseguenze di queste applicazioni sulla teoria dei giochi vengono valutate positivamente da Fred Kaplan nel 1983:

[game theory] was a conservative theory and a pessimistic one as well. It said that it was irrational behavior to take a leap, to do what is best for both parties and trust that one's opponent might do the same. In this sense, game theory was the perfect intellectual rationale for the Cold War, the vehicle through which many intellectuals accepted its assumptions. (...) However, in doing so, they [gli studiosi di teoria dei giochi] created a vocabulary, a style of thinking that tended to make nuclear war appear more like a chess game than an unprecedented catastrophe³⁶¹.

Le applicazioni della teoria dei giochi si allargano negli anni successivi anche alle scienze sociali, la politica in primo luogo. Partendo da un fondamentale articolo di Shapley e Shubik del 1954³⁶², molti studiosi di scienza della politica iniziano a studiare l'arte della diplomazia e le regole della democrazia secondo il nuovo approccio³⁶³. Un'altra importante estensione si crea nella sociologia, che tende ad utilizzare la teoria dei giochi come strumento per impostare il lavoro di verifica empirica³⁶⁴. Un effetto analogo interessa anche la psicologia e la scienza del comportamento³⁶⁵.

Seguendo il progetto iniziale di von Neumann e Morgenstern, l'economia continua però a rappresentare il più diretto campo di applicazione della teoria dei giochi. Per descrivere questi sviluppi è necessario prima tracciare un quadro sintetico dei progressi di natura matematica che il nuovo strumento subisce nel periodo 1944-1959.

5.2 Gli sviluppi matematici della teoria dei giochi

La letteratura matematica che si occupa di teoria dei giochi negli anni '50 è opera quasi esclusivamente della comunità scientifica descritta nel paragrafo precedente. Questa produzione assai ampia è caratterizzata da una rigorosa formalizzazione tanto che Luce e Raiffa, tentando nel 1957 un primo bilancio di questa intensa attività, scrivono:

it is worthy emphasizing again that game theory is primarily a product of mathematicians and not of scientists from the empirical fields. In large part this results from the fact that the theory was originated by a mathematician and was, to all intents and purposes, first presented in

book form as a highly formal (though, for the most part, elementary) structure, thus tending to make it accessible as a research vehicle only to mathematicians³⁶⁶.

L'elevato livello formale della matematica impiegata rende poco accessibile agli economisti una diretta fruizione della teoria dei giochi ed è questo il motivo principale delle scarse applicazioni economiche presentate negli anni '50. E' necessario però sottolineare che gran parte degli strumenti della teoria dei giochi applicati all'economia nei decenni successivi vengono ideati nello stesso periodo.

Per rendersi conto delle caratteristiche di questa prima fase di evoluzione della teoria dei giochi è utile fare riferimento ai primi quattro volumi dei Contributions to the Theory of Games, editi dall'Università di Princeton, che raccolgono quasi tutte le maggiori innovazioni matematiche del decennio.

L'indice del primo volume, pubblicato nel 1950, distingue gli articoli presentati in quelli che si occupano di giochi con un numero finito di strategie e quelli che invece trattano giochi con un numero infinito di strategie. L'attenzione degli autori è però dedicata quasi esclusivamente ai metodi di calcolo delle soluzioni dei giochi a due persone e a somma zero. Le uniche due eccezioni sono rappresentate da un articolo di Mc Kinsey, che discute la validità dell'ipotesi di S-equivalenza, definita da von Neumann e Morgenstern per i giochi a n persone, e da un paper di Shapley e Nash dedicato alla ricerca delle soluzioni di un poker a tre giocatori.

Nelle pagine finali dell'introduzione a questo volume, i suoi curatori, Kuhn e Tucker, compilano un'agenda per la ricerca futura. Il principale obiettivo da raggiungere è rappresentato, a loro avviso, dalla dimostrazione dell'esistenza di una soluzione generale ai giochi a n persone a somma non costante, che includa anche il processo di formazione delle coalizioni. In assenza di tale risultato, questo settore della teoria dei giochi viene definito da Kuhn e Tucker come una "zone of twilight"³⁶⁷, ancora in attesa di una chiara definizione.

Il secondo volume dei Contributions, edito nel 1953, sembra tenere conto di questo auspicio: un intero capitolo viene dedicato ai giochi a n persone. Gli autori di questi articoli si limitano però a sviluppare i procedimenti matematici di Theory of Games senza presentare, con l'unica eccezione del 'valore' di Shapley, nuovi concetti di soluzione. La novità più importante è contenuta nelle parti dedicate alla sistemazione matematica dei giochi in forma estesa, ma il libro resta ancora largamente dedicato ai giochi a somma costante, che risultano ancora la "keystone"³⁶⁸ della teoria dei giochi, occupando i quattro quinti degli articoli proposti.

Il successivo volume dei Contributions, pubblicato nel 1957, è un'ulteriore conferma di questa caratteristica: esso è dedicato interamente ai giochi a somma zero con un numero infinito di strategie.

Tralasciando per il momento il quarto volume, che appare alla fine del decennio, questo sintetico censimento offre una conferma alle perplessità espresse da Luce e Raiffa sulla possibilità di applicare estesamente la teoria dei giochi nelle scienze sociali. La ricerca dei metodi di soluzione ai giochi a somma costante e a due giocatori assume il ruolo di cimento delle capacità dei matematici di professione, ma contemporaneamente allontana l'attenzione degli studiosi interessati all'applicazione della teoria dei giochi. Questa scelta, motivata dai ricercatori coinvolti con la necessità di occuparsi di un argomento tecnicamente semplice che consenta rigore e precisione nelle dimostrazioni, deve essere attribuita proprio allo 'standard of modesty'

adottato da von Neumann e Morgenstern: ottenere prima risultati certi in ambiti più modesti e, solo dopo, allargare l'analisi a questioni più complesse. Nasce quindi proprio dall'impostazione metodologica dei suoi fondatori uno dei motivi che rinvia agli anni successivi un'ampia estensione del nuovo strumento all'economia.

Il ristretto numero di autori che tentano negli anni '50 di colmare questa distanza tra l'economia e la teoria dei giochi non appartiene però solo ai settori di analisi che fanno parte della 'teoria dei giochi economica', categoria artificialmente creata dagli storici del pensiero e discussa nell'introduzione di questo studio. Anche in questa prima fase evolutiva, il nuovo strumento matematico contribuisce al progresso dell'intera teoria economica. Una prima estensione, che assumerà nei decenni successivi il ruolo di principale ambito di applicazione della teoria dei giochi, riguarda l'analisi dei mercati oligopolistici, nella quale Martin Shubik assume il ruolo di fondatore di una nuova metodologia. Nella teoria della contrattazione, che ha nel mercato di monopolio bilaterale una delle principali esemplificazioni economiche, i concetti di soluzione presentati da Nash vengono estesi da Harsanyi al modello datore di lavoro/sindacati definito da Zeuthen nel 1930. La terza area tematica interessata è quella della concorrenza perfetta: sia la dimostrazione dell'esistenza di un equilibrio economico competitivo di Arrow e Debreu che la scoperta di Shubik dell'identità tra 'core' e la soluzione di Edgeworth al problema della contrattazione fanno ricorso al nuovo strumento matematico. La teoria dei giochi viene estesa anche alla teoria della decisione nelle sue diverse forme: in condizioni di certezza, contribuendo a creare gli strumenti matematici della programmazione lineare; in condizioni di incertezza, con le soluzioni di Milnor e Wald ai 'giochi contro Natura'; individuale, attraverso l'applicazione dell'indice di utilità definito da von Neumann e Morgenstern; multipersonale, entrando a comporre gli strumenti impiegati da Arrow per la dimostrazione del suo famoso teorema dell'impossibilità e contribuendo a sviluppare un criterio generale di 'divisione equa'. Nascono infine nuove forme di verifica empirica della teoria economica: i giochi sperimentali ed i 'business games'.

Alla discussione di questi sviluppi è però necessario premettere una sintetica descrizione dei principali concetti matematici sviluppati negli anni '50, limitandosi a trattare quelli che vengono contemporaneamente applicati in economia. L'esposizione che segue riprende l'ordine adottato da von Neumann e Morgenstern in *Theory of Games*: dopo aver discusso i contributi che modellano la forma estesa di un gioco, si offre un breve resoconto di quelli relativi alla forma normale; chiude il paragrafo la presentazione dei principali concetti di soluzione proposti, prima cooperativi e infine non cooperativi.

A) La forma estesa

Un problema lasciato irrisolto da von Neumann e Morgenstern, la rappresentazione della forma estesa di un gioco, viene affrontato agli inizi degli anni '50 da Harold W. Kuhn, curatore tra l'altro dei primi due volumi dei *Contributions*. In due articoli pubblicati nel 1950 e nel 1953, Kuhn semplifica il modello assiomatico presentato da von Neumann e Morgenstern adottando un metodo di esposizione grafico³⁶⁹. In *Theory of Games*, un gioco in forma estesa era costituito da una sequenza di mosse rappresentata attraverso un 'game tree'. Kuhn definisce questo grafico a

forma di albero come un insieme finito di punti (o vertici) collegati da linee ed ordinati secondo una relazione di precedenza transitiva e anti-simmetrica³⁷⁰. Il vertice iniziale, denotato dal numero 0, corrisponde alla mossa 'casuale', e ad esso è associata una distribuzione di probabilità nota a tutti i giocatori. Da questo singolo punto si dipartono i rami che conducono ad altri vertici, ognuno dei quali è accompagnato dall'indicazione del giocatore che deve effettuare la mossa corrispondente. A ciascun vertice finale è associato un vettore di pagamenti.

La novità più importante introdotta da Kuhn è la rappresentazione dello stato di informazione di ogni giocatore attraverso un insieme di informazione h , indicato graficamente da una linea tratteggiata che racchiude alcuni vertici del gioco. Se un vertice x appartiene all'insieme di informazione $h(x)$, allora il giocatore che muove a quel vertice è incerto se si trova in x od in un altro vertice x' appartenente anch'esso a $h(x)$. In base a questa definizione, un gioco è ad informazione perfetta se tutti gli insiemi di informazione comprendono un unico vertice, mentre è ad informazione imperfetta se almeno un insieme di informazione include due o più vertici.

La forma estesa di un gioco è definita allora dal seguente insieme di informazioni:

- (a) l'insieme dei giocatori;
- (b) l'ordine delle mosse e l'indicazione del giocatore che muove in ogni circostanza;
- (c) i pagamenti dei giocatori in funzione delle strategie scelte;
- (d) lo stato di informazione di ogni giocatore in corrispondenza di ogni mossa;
- (e) la distribuzione di probabilità associata alla mossa casuale.

Questo modello permette a Kuhn di introdurre anche una nuova definizione di strategia. Mentre una strategia pura elenca le scelte di un giocatore per tutte le possibili situazioni del gioco ed una strategia mista è una distribuzione di probabilità sull'insieme delle strategie pure, una strategia di comportamento consiste nell'indicazione, per ogni distinto insieme di informazione, di una distribuzione di probabilità sulle alternative appartenenti a quell'insieme. Questa distribuzione consente di calcolare la probabilità che ogni vertice del gioco venga raggiunto e di derivare quindi il valore dei pagamenti finali.

Nel 1953 Kuhn dimostra anche che a ciascuna strategia mista corrisponde un'unica strategia di comportamento, ma che questa corrispondenza univoca non vale in senso inverso³⁷¹. Questa difformità tra i due tipi di strategia non vale per i giochi a memoria perfetta, in cui nessun giocatore dimentica l'informazione posseduta in ogni sua mossa precedente e tutti i giocatori conoscono le scelte fatte in precedenza. Per imporre formalmente questa condizione è sufficiente che se i vertici x e x' appartengono allo stesso insieme di informazione, allora nessuno dei due preceda l'altro³⁷². Per tutti i giochi con memoria perfetta il pagamento ottenibile impiegando strategie di comportamento è uguale a quello che proviene dall'impiego di una strategia mista.

I giochi non a memoria perfetta vengono invece studiati da Thompson³⁷³. Se un giocatore non ricorda in una fase successiva del gioco la scelta che ha compiuto ad un insieme di informazione precedente, quest'ultimo viene definito insieme 'signalling'. In questo caso, il giocatore deve ricorrere ad una strategia composta. Deve adottare cioè una strategia mista per gli insiemi di informazione 'signalling' e una

strategia di comportamento per quelli che non lo sono. Thompson dimostra che questo metodo assicura al giocatore lo stesso pagamento ottenibile con l'impiego di una strategia mista.

La letteratura matematica che sviluppa negli anni '50 questa definizione generale di forma estesa persegue tre diversi obiettivi. Un primo insieme di contributi definisce le condizioni che rendono due giochi in forma estesa strategicamente equivalenti col fine di semplificare il metodo di calcolo della soluzione³⁷⁴.

Una generalizzazione del modello di Kuhn è oggetto invece del lavoro di Berge³⁷⁵. Attraverso una definizione topologica della forma estesa, Berge applica la forma estesa ai giochi in cui sia il numero delle alternative presenti ad ogni mossa che il numero di mosse sono infiniti.

L'ultima, e più ampia, area di ricerca cerca di definire nuovi tipi di giochi. Un primo esempio è rappresentato dai giochi di posizione³⁷⁶, nei quali viene rimossa un'ipotesi fondamentale del modello di Kuhn. In questo modello una certa posizione del gioco può ripetersi più volte; è quindi possibile arrivarvi seguendo sequenze di mosse diverse tra loro.

Nel 1957, Everett formalizza la categoria dei giochi ricorrenti³⁷⁷. Un gioco ricorrente è composto da un gioco componente e da un supergioco; dopo aver giocato il gioco componente, e in funzione del suo risultato, il supergioco stabilisce se il gioco componente deve essere ripetuto oppure se devono essere distribuiti i pagamenti.

I giochi formalizzati da Everett rappresentano un caso particolare dei giochi stocastici³⁷⁸, che includono anch'essi un supergioco e un insieme di giochi componenti diversi tra loro. In questo modello, ideato da Shapley nel 1953, esiste un gioco componente iniziale e le strategie impiegate in questa prima fase dai giocatori determinano, oltre alla probabilità che il supergioco termini o continui, anche un vettore dei pagamenti per ogni gioco componente.

Nel 1954 Isaacs estende i giochi stocastici ai casi in cui i giocatori devono determinare le loro strategie su un insieme di alternative definite in modo continuo attraverso i giochi differenziali³⁷⁹. Un esempio di questa tipologia era quello definito già da Steinhaus nel 1925: l'inseguimento tra una nave che sfugge e una che insegue, con la prima che vuole massimizzare il tempo di fuga e la seconda che vuole minimizzare il tempo di presa³⁸⁰.

Martin Shubik presenta negli anni '50 un'applicazione economica dei giochi di sopravvivenza³⁸¹. Nella loro forma più semplice, due giocatori, a ciascuno dei quali viene assegnata una ricchezza iniziale, si affrontano in un gioco a somma zero. Il gioco si conclude se uno dei due annulla le sue disponibilità, ma è possibile anche che il gioco duri all'infinito³⁸².

L'ultima tipologia di gioco in forma estesa che riceve una prima definizione negli anni '50 è quella data da Robert J. Aumann nel quarto volume dei Contributions³⁸³. Questo strumento - i giochi ripetuti - assumerà un'importanza fondamentale nei decenni successivi diventando negli anni '80 la principale forma di applicazione economica della teoria dei giochi³⁸⁴. Dato un gioco G , un gioco ripetuto è un supergioco costituito da una sequenza infinita di ripetizioni (o stadi) di G . Ad ogni stadio tutti i giocatori conoscono le decisioni prese da tutti i giocatori negli stadi precedenti. I pagamenti del 'supergioco' sono rappresentati da una media dei pagamenti attualizzati associati ai singoli stadi.

B) La forma normale

Negli anni '50, gran parte della letteratura matematica sulla teoria dei giochi è dedicata allo studio dei giochi a due persone a somma zero. Il primo ed il terzo volume dei Contributions to the Theory of Games raccolgono solo contributi appartenenti a questa tipologia, mentre nel secondo volume (1953) viene dedicata ai giochi generali a n persone solo la sezione finale. L'assoluta prevalenza di uno strumento di minore interesse per l'economia viene confermato anche dai manuali di teoria dei giochi. Il primo libro a fini didattici viene pubblicato da Mc Kinsey nel 1952 ed ottiene in breve tempo un buon successo editoriale, diventando il principale testo adottato dalle università americane³⁸⁵. Mc Kinsey discute solo la teoria dei giochi matriciali di forma $m \times n$, giudicando prematura un'estesa trattazione della teoria dei giochi a n persone³⁸⁶. Altri due manuali pubblicati negli anni '50, uno di buon livello matematico di Blackwell e Girschick e l'altro di livello elementare scritto da John Davis Williams³⁸⁷, seguono la stessa impostazione di Mc Kinsey.

Una prima serie di articoli matematici sulla forma normale di un gioco è dedicata a riformulare il teorema del minimax secondo metodi algebrici. Il primo progresso in questa direzione viene compiuto da Irving Kaplansky nel 1945, che offre un primo metodo di calcolo del valore del minimax attraverso l'impiego di submatrici quadrate. Prendendo spunto da questo articolo, L. H. Loomis presenta pochi anni dopo la prima dimostrazione interamente algebrica del teorema³⁸⁸.

Un aspetto trascurato da Theory of Games era l'estensione del teorema del minimax a giochi con un numero infinito di strategie. Di questo problema si occupa per primo Abraham Wald³⁸⁹ nel 1945, ma la sua soluzione è limitata al caso in cui soltanto uno dei due giocatori dispone di un insieme infinito di strategie. Ricorrendo al teorema del punto fisso di Brouwer, semplificato nel 1941 da Kakutani, Bohnenblust e Karlin³⁹⁰ offrono nel 1950 una prima estensione del minimax a spazi a dimensione finita. Il loro lavoro viene portato a termine da Glicksberg che dimostra la validità del minimax per un gioco arbitrario³⁹¹.

Progressi significativi riguardano anche la semplificazione dei metodi di calcolo della soluzione di un gioco in forma normale. Un primo metodo grafico, fondato sulla teoria degli iperpiani separatori, viene messo a punto alla fine degli anni '40 da Gale, Kuhn e Tucker³⁹². Prendendo spunto dall'articolo di Kaplansky del 1945, Shapley e Snow ideano nel 1950 un nuovo sistema di calcolo, basato sulle submatrici quadrate di una matrice rettangolare $m \times n$ ³⁹³. Dall'applicazione della teoria dei giochi alle tecniche della programmazione lineare nascono altri due metodi: il 'double description method', anch'esso fondato sulla teoria degli iperpiani separatori³⁹⁴ ed il 'simplex method', basato sulla relazione fra un problema di minimizzazione ed il suo duale³⁹⁵. Lo stesso von Neumann, insieme a G. W. Brown, torna ad occuparsi di teoria dei giochi ideando un sistema di equazioni differenziali che rende possibile la soluzione di giochi formati da matrici di dimensione $m \times m$ ³⁹⁶. Si deve infine a Julia Robinson un metodo iterativo per il calcolo della soluzione di un gioco in forma normale³⁹⁷.

Contemporaneamente a questa estensione matematica del lavoro di von Neumann e Morgenstern, negli anni '50 si sviluppa anche una discussione critica sulla validità teorica ed empirica del minimax, portata avanti principalmente da economisti di formazione matematica esterni alla RAND Corporation³⁹⁷. Hans Neisser e Carl Kaysen pubblicano, nel 1952, due interventi nei quali elencano alcuni esempi di giochi in cui l'adozione

del principio del minimax conduce a decisioni definite come irrazionali. Un esempio mostrato da Neisser è il seguente:

		Gioc. B	
		1	2
Gioc. A	1	-2	-1
	2	-3	1

Sebbene il minimax prescriva per il giocatore A l'adozione della strategia 1, il principio di comportamento che esso sottintende (quello di 'expecting the worst') viene giudicato inappropriato da Neisser, che ritiene invece la strategia 2 come la predizione più probabile.

Le critiche di Kaysen si appuntano invece sulla non validità del teorema del minimax in condizioni di informazione incompleta. L'incertezza che caratterizza in questo caso il gioco rende più probabile un comportamento 'offensivo', invece che uno di tipo 'difensivo'. E' evidente però che questa possibilità veniva esplicitamente esclusa in Theory of Games.

La critica al minimax caratterizza anche un articolo pubblicato nel 1956 da Daniel Ellsberg. Secondo Ellsberg, la sicurezza rappresentata dal minimax ha un costo: limitare superiormente il pagamento ottenibile. E per affrontare questo costo un giocatore deve essere certo che anche l'avversario adotterà una strategia minimax. Si consideri la seguente matrice 3x3:

		Gioc. B		
		B1	B2	B3
Gioc. A	A1	10	0	-10
	A2	0	0	0
	A3	-10	0	10

Se il giocatore A adotta la strategia maxmin (A2) e B adotta la strategia minmax (B2), il valore del gioco è 0. Ma se il giocatore A opta per A1 o per A3, con B che continua a giocare B2, ottiene lo stesso pagamento. Può però verificarsi che B non sia sicuro di giocare la strategia B2, o perché non conosce il principio del minimax o perché attirato dalla possibilità di un guadagno positivo. In questo caso A può, con una delle due strategie non-maxmin (A1 o A3), guadagnare 10 o perdere 10 ed egli potrebbe preferire questa incertezza alla sicurezza di ottenere un pagamento nullo.

Ellsberg presenta anche un'altra considerazione critica. In base alla definizione di utilità adottata in Theory of Games, le scelte dei giocatori non dovrebbero mutare se i vari elementi della matrice fossero moltiplicati per una costante. L'alternativa (+10,-10) è però un rischio più facilmente sopportabile per il giocatore A rispetto a quella tra (+1000,-1000), ma le ipotesi di von Neumann e Morgenstern non permettono di evidenziare queste differenze³⁹⁹.

L'idea quindi che comportamenti diversi da quello minimax siano 'dannosi' viene rigettata da Ellsberg, che riferendosi a von Neumann e Morgenstern, scrive:

Their conception of 'harm' seems to exclude any element of 'opportunity cost', 'regret', any notion of the pain incurred in passing up a real chance of great gains or in discovering, afterwards, that one could have done much better than he did (by risking slightly worse). The very mention of the possibility that an opponent will violate any given set of rules suggests that any element in the whole matrix is possible⁴⁰⁰.

Se nessuno dei due giocatori è assolutamente certo della strategia che l'avversario si appresta a seguire, ognuno di essi può ragionevolmente giocare anche una strategia non-minimax. Il minimax presuppone invece due giocatori decisamente pessimisti e che siano interessati solo al minimo garantibile⁴⁰¹. Senza assunzioni psicologiche di questo tipo e limitandosi ad ipotizzare giocatori ragionevoli e informati, il punto di sella non rappresenta un risultato necessario⁴⁰². Inoltre quando il gioco viene ripetuto più volte, un punto di sella rappresenta un punto di equilibrio solo se ambedue i giocatori si attendono che l'avversario giochi la strategia minimax. Ma a tale previsione deve essere assicurata un'assoluta stabilità, perché se uno dei due giocatori, per qualunque ragione, cambia strategia, tutte le aspettative sul comportamento dell'avversario vengono meno e i giocatori hanno entrambi un incentivo ad impiegare metodi di gioco diversi da quello prescritto da von Neumann e Morgenstern. Un'analisi di carattere dinamico apre quindi ulteriori possibilità per l'adozione di strategie non-minimax, quali per esempio quelle tese a 'imbrogliare' l'avversario sulle proprie intenzioni, sulla propria razionalità o sulla propria conoscenza dei payoff.

C) I concetti di soluzione per giochi cooperativi

La ricerca di una soluzione ai giochi adotta fin dalle sue origini una fondamentale distinzione: un gioco viene definito cooperativo se i giocatori effettuano prima dello svolgimento del gioco una contrattazione nella quale possono concludere accordi vincolanti; un gioco è invece non-cooperativo se le regole del gioco non permettono questa forma di comunicazione e di impegno reciproco. Il concetto di soluzione proposto in Theory of Games rientra quindi nella categoria dei giochi cooperativi. Negli anni '50 l'evoluzione di questa area teorica si distingue a sua volta in due diversi approcci: da una parte si estende la definizione di von Neumann e Morgenstern; dall'altra si delineano modelli di contrattazione costruendo schemi di carattere normativo per la loro soluzione.

Alla prima categoria di soluzioni appartiene quella proposta nel 1953 dal lavoro congiunto di Shapley e Gillies⁴⁰³: il core. Si ricorda che in Theory of Games un'imputazione x domina una imputazione y se esiste una coalizione di giocatori S che è in grado di assicurarsi l'insieme degli elementi del vettore x attribuiti ai suoi membri e se ognuno di questi ultimi preferisce l'imputazione x a y . In base a questa definizione, il 'core' corrisponde all'insieme di tutte le imputazioni non dominate. Il principale problema insito in questa definizione, che restringe l'insieme di imputazioni individuate dalla soluzione di von Neumann e Morgenstern, è che molti giochi hanno 'core' vuoti, non comprendendo nessuna imputazione che non sia ulteriormente migliorabile.

Allo stesso Lloyd S. Shapley⁴⁰⁴ si deve un nuovo concetto di soluzione, che rappresenta anch'esso un'estensione della teoria di von Neumann e Morgenstern. Il valore di Shapley corrisponde ad un vettore di pagamenti che assegna ad ogni giocatore il contributo marginale medio che quest'ultimo arreca a tutte le coalizioni di cui può entrare a fare parte. Il suo risultato può essere interpretato immaginando la formazione casuale di una coalizione di tutti i giocatori, iniziando da un singolo membro e aggiungendo un giocatore per volta. A ciascun giocatore viene allora assegnato il vantaggio che la sua ammissione provoca alla coalizione. Questo processo viene ripetuto per tutti gli ordini di ingresso possibili ed il valore di Shapley si ottiene facendo una media, per ogni diverso giocatore, di tutti i pagamenti così calcolati.

Un approccio differente alla soluzione dei giochi cooperativi viene avviato dal lavoro di Nash. Nel suo articolo "The Bargaining Problem"⁴⁰⁵, apparso su *Econometrica* nel 1950, Nash tenta di dare soluzione al problema della contrattazione lasciato irrisolto da von Neumann e Morgenstern. In *Theory of Games*, la soluzione ad un gioco cooperativo a due persone è data dall'insieme di negoziazione, composto da tutti i vettori 'disponibili' che assegnano ad ogni giocatore almeno quanto egli può assicurarsi indipendentemente in un gioco non cooperativo giocando la sua strategia minimax. Per determinare un'unica soluzione all'interno di questo insieme, Nash propone di fare riferimento ad uno schema di arbitraggio a cui i giocatori accettano di sottoporsi⁴⁰⁶.

Nel caso di un gioco a due persone le utilità dei giocatori 1 e 2 possono essere espresse rispettivamente con i valori u e v . Rappresentando su due assi cartesiani queste utilità, è possibile individuare un punto di non scambio (u', v') , che corrisponde alle dotazioni iniziali dei giocatori, ed un insieme di punti R che comprende tutti gli scambi possibili date queste dotazioni. Il problema diventa allora quello di definire un unico punto (u^*, v^*) all'interno di questo insieme R . Lo schema di arbitraggio adottato da Nash per definire questo risultato comprende quattro assiomi: invarianza rispetto a trasformazioni di utilità, ottimalità paretiana, indipendenza dalle alternative irrilevanti e simmetria. Nash dimostra che il vettore (u^*, v^*) tale che, per ogni u diverso da u^* e ogni v diverso da v^* , soddisfa

$$(u^* - u')(v^* - u') > (u - u')(v - u')$$

è l'unica coppia di valori che soddisfa queste ipotesi.

Nash⁴⁰⁷ torna sull'argomento nel 1953 estendendo il suo modello originale. In questa versione, i valori (u', v') non sono più rappresentati dalle dotazioni iniziali dei giocatori, bensì dai pagamenti corrispondenti alle azioni che ogni giocatore minaccia di attuare nel caso in cui non venga raggiunto alcun accordo. Il gioco di contrattazione comprende allora una prima fase a cui Nash applica il concetto di equilibrio da lui ideato per i giochi non cooperativi nel 1950, che determina il vettore (u', v') , ed una seconda fase cooperativa che adotta lo stesso criterio di soluzione precedente.

Lo schema di arbitraggio definito da Nash viene sviluppato negli anni '50 da alcuni contributi che offrono interessanti estensioni della sua soluzione. Howard Raiffa⁴⁰⁸ elabora nel 1953 un metodo grafico che consente di individuare nell'insieme dei risultati ottimi, in senso paretiano, del processo di contrattazione un unico punto che risponde ad un criterio di giustizia definito attraverso un insieme di assiomi. Il lavoro di Raiffa viene ulteriormente sviluppato da R. B. Braithwaite⁴⁰⁹. Come Raiffa, Braithwaite introduce un modello assiomatico per permettere

la comparazione interpersonale delle utilità dei giocatori, ma egli fissa il vettore (u',v') in corrispondenza dei livelli di sicurezza che ogni giocatore può assicurarsi adottando una strategia minimax. Partendo da questo punto di origine, assegna poi il guadagno permesso dallo scambio in parti uguali ai due giocatori. Entrambi i modelli ripropongono comunque la suddivisione del processo di contrattazione in due fasi proposta da Nash: una prima, non-cooperativa, che determina i parametri di equità dello scambio ed una seconda, cooperativa, che si propone di determinare un accordo il più possibile efficiente.

Un contributo originale rispetto alla teoria di Nash proviene nella seconda metà del decennio da Schelling⁴¹⁰. La sua critica si fonda sull'idea che, qualunque criterio astratto di giustizia o di simmetria si assuma, ogni schema di arbitraggio seppure formalmente corretto è inevitabilmente arbitrario. Schelling propone perciò un metodo empirico per predire il risultato del processo di contrattazione: o si può assumere che gli individui coinvolti nella contrattazione abbiano in comune esperienze precedenti che consentano di uniformare le loro scelte; oppure che emerga una soluzione che diventa, in senso più qualitativo che quantitativo, il punto focale della contrattazione. Ciò che conduce, in quest'ultimo caso, le parti ad un accordo è il magnetismo intrinseco di una particolare soluzione, che può caratterizzarsi per preminenza, unicità, semplicità o per qualunque altra ragione che la renda qualitativamente differenziabile dal 'continuum' delle alternative possibili. La possibilità che non esista alcun equilibrio 'a priori' che possieda una di queste caratteristiche non può comunque essere esclusa.

D) I concetti di soluzione per i giochi non-cooperativi

Negli anni '50, l'enorme influenza della teoria dei giochi cooperativi di von Neumann e Morgenstern pone in secondo piano quella dei giochi non-cooperativi. L'unica eccezione significativa è rappresentata dall'opera di Nash. La sua definizione di equilibrio viene pubblicata per la prima volta nel 1950 ed estesa poi, nel 1951, con un articolo intitolato "Non-Cooperative Games". Nel 1950 l'obiettivo di Nash è quello di formulare un concetto di soluzione di applicabilità generale. In Theory of Games tutti i giochi venivano risolti attraverso il minimax, esteso ai giochi a somma generale con l'introduzione dell'artificio del giocatore 'fittizio'. Nash supera quell'approccio proponendo un concetto diverso: una soluzione è composta da tutte quelle strategie, una per ogni giocatore, tali che nessun giocatore può migliorare il proprio pagamento deviando da quella a lui assegnata. Nel 1951, Nash stabilisce l'esistenza della sua soluzione dimostrando due teoremi. Il primo afferma che ogni gioco non cooperativo finito a n persone possiede almeno una configurazione di equilibrio in strategie miste. L'altro teorema afferma che, se il numero dei giocatori è finito, se l'insieme delle strategie di ogni giocatore è un sottoinsieme compatto e convesso di uno spazio euclideo e se la funzione che associa ogni possibile strategia ai pagamenti è continua, limitata e quasi concava, esiste un punto di equilibrio in strategie pure.

Questa definizione di equilibrio rappresenta oggi, senza dubbio, il concetto più impiegato nella teoria economica fondata sulla teoria dei giochi. Negli anni '50 essa viene invece criticata ed, escluse poche eccezioni, scarsamente applicata.

Il principale appunto mosso alla soluzione di Nash è che essa ammette solitamente una molteplicità di punti di equilibrio e che non esistono criteri significativi per selezionarne uno⁴¹¹. Affinché un gioco

che include più soluzioni d'equilibrio possa essere considerato risolvibile attraverso il criterio di Nash è necessario che ognuno di esse sia intercambiabile e assicuri lo stesso pagamento ad ogni giocatore. Ma in un gioco come il noto 'Battaglia dei sessi', l'applicazione del concetto definito da Nash non possiede questa proprietà:

		Gioc. 1	
		A1	B1
Gioc. 2	A2	2, 1	-1, -1
	B2	-1, -1	1, 2

Le due soluzioni, (A1,B1) e (A2,B2), sono entrambi equilibri di Nash ma non sono intercambiabili. Su questa molteplicità di esiti possibili di un gioco si appuntano le critiche rivolte negli anni '50 al concetto di soluzione di Nash⁴¹².

La letteratura matematica degli anni '50 tende quindi a trascurare la soluzione di Nash. Le uniche eccezioni provengono da alcuni tentativi di estendere l'applicabilità del suo concetto di equilibrio. La prima estensione del teorema di Nash, presentata da Glicksberg nel 1952⁴¹³, è relativa alla sua applicazione a giochi con una funzione dei pagamenti definita su spazi a dimensione finita. Glicksberg allarga ulteriormente la generalità dell'equilibrio di Nash dimostrandone la validità anche per funzioni di pagamenti non quasi concave.

Nel 1950 Kuhn estende il teorema di Nash ai giochi a n persone, dimostrando che se questi ultimi sono ad informazione perfetta esiste sempre un punto di equilibrio in strategie pure⁴¹⁴.

L'ultima importante estensione del concetto di Nash riguarda la sua applicazione al notissimo gioco del 'dilemma del prigioniero'⁴¹⁵. Nell'esempio presentato da Thompson⁴¹⁶ nel 1956, esso è rappresentato dalla seguente matrice:

		Smith	
		H	L
Jones	H	10,10	6,16
	L	16,6	7,7

L'equilibrio di Nash è rappresentato da (7,7), ma è il pagamento (10,10) a rappresentare l'esito più favorevole. La soluzione proposta da Luce e Raiffa, in Games and Decisions⁴¹⁷, a questa contraddizione ricorre alla ripetizione del gioco. In una prima versione cooperativa, Jones sceglie sempre H e Smith sempre L, determinando un pagamento totale uguale a 22. Con un pagamento collaterale da Smith a Jones di 5, il risultato per entrambi diventa uguale a 11; in presenza invece di un esplicito divieto di effettuare pagamenti collaterali, lo stesso risultato può essere ottenuto se la scelta di H per Jones e di L per Smith è alternata ad ogni ripetizione del gioco con quella di L per Jones

e di H per Smith, in modo che in ogni ciclo di due giorni il pagamento medio sia ancora di 11 per entrambi.

Una risposta diversa viene formulata da Shubik e Thompson⁴¹⁸ all'interno di una delle poche applicazioni economiche degli anni '50. Se Jones e Smith sono i proprietari di due imprese e Jones può contare su maggiori risorse iniziali rispetto all'avversario, il dilemma 'ripetuto' ha una soluzione non cooperativa. Jones può infatti imporre all'avversario la strategia H minacciando di adottare una strategia 'tit-for-tat': se Smith adotta L, Jones lo imita fino a quando Smith non è 'rovinato'. Poiché la minaccia di Jones è credibile - egli può contare su una maggiore quantità di capitali - essa ha la meglio su un'analogha minaccia di Smith e (10,10) è la soluzione del gioco.

L'importanza di questi due ultimi tipi di soluzione è evidente quando si consideri la centralità che la teoria non-cooperativa assume nelle odierne applicazioni della teoria dei giochi all'economia. Negli anni seguenti anche i giochi cooperativi vengono analizzati come giochi non-cooperativi, formalizzando la comunicazione che precede il loro svolgimento in una serie di mosse determinate e costruendo così un gioco in forma estesa.

5.3 L'analisi dei mercati imperfetti

Negli anni '50 lo studio del funzionamento dei mercati oligopolistici, oggi divenuto uno dei principali ambiti di applicazione della teoria dei giochi, è oggetto di un'ampia letteratura. L'accentuarsi degli sforzi in questa direzione è dovuto in primo luogo all'opera di Chamberlin e della Robinson che fondano questo settore dell'economia industriale su assunti teorici originali: i loro scritti, la cui ambizione irrisolta è di creare una nuova metodologia economica, riescono comunque a provocare un parziale superamento dei principi neoclassici. La loro principale eredità è la dimostrazione che nei mercati in cui alcuni venditori o compratori specifici vendono o comprano frazioni considerevoli del volume totale di mercato, e in cui perciò gli altri venditori o compratori sono influenzati dai comportamenti dei primi, la metodologia economica tradizionale si rivela inadeguata. In questi casi, che comprendono il duopolio, l'oligopolio, le varie forme di monopsonio e oligopsonio e il monopolio bilaterale, la derivazione delle funzioni di domanda e di offerta sulla base dei dati tecnologici e delle funzioni di utilità consente infatti solo la determinazione di uno spazio esteso di prezzi e di quantità, che è riducibile ad un equilibrio unico solo adottando un diverso apparato teorico.

Una seconda causa dell'importanza assunta dallo studio del funzionamento di questi mercati va ricercata nell'evoluzione del sistema produttivo: intorno alla metà del '900, l'oligopolio assume una rilevanza tale da indurre gli studiosi di economia industriale a spostare la loro attenzione dalla teoria dei mercati perfetti a quella del funzionamento del processo concorrenziale.

I diversi programmi di ricerca che intraprendono questo percorso si sviluppano però in modo tutt'altro che omogeneo. Cronologicamente, i primi tentativi di portare avanti in modo originale la riflessione di Chamberlin vengono effettuati da William Fellner (1949) e Hans Brems (1951). Pochi anni dopo nasce quello che resterà il paradigma dominante dell'economia industriale anglosassone fino agli anni settanta; a

fondarlo è l'opera di Joe S. Bain del 1956, *Barriers to New Competition*, che ispira poco dopo i lavori di Sylos Labini e di Modigliani⁴¹⁹. La critica ai principi della concorrenza monopolistica conduce questi autori a fondare la loro analisi direttamente sull'osservazione empirica dei comportamenti delle imprese, pervenendo alla descrizione dei fenomeni delle barriere all'entrata e dei prezzi-limite. Un nuovo approccio all'economia industriale, in aperta polemica con la teoria neoclassica, viene avviato verso la metà del decennio da Herbert Simon che inizia la sua riflessione sulla razionalità limitata. Infine, nel 1959, Baumol definisce i primi lineamenti della teoria manageriale⁴²⁰.

Ad una così intensa attività non corrisponde altrettanta attenzione verso il nuovo strumento elaborato da von Neumann e Morgenstern che viene ignorato del tutto - come nel caso del libro di Bain del 1956 o della teoria manageriale - oppure criticato per le sue assunzioni, che vengono considerate troppo astratte per essere applicate in economia.

Il primo autore che, dopo la pubblicazione di *Theory of Games*, dedica un intero volume alla teoria dell'oligopolio è William Fellner. La sua opera principale, edita nel 1949, è costruita attorno al concetto di 'fewness', che contraddistingue i mercati oligopolistici. Per Fellner, l'esistenza di un numero ristretto di competitori rende necessaria l'analisi del fenomeno dell'interdipendenza congetturale, del fatto cioè che "the other sellers and buyers are affected materially by what single firms are doing"⁴²¹. Dopo avere discusso criticamente le soluzioni presentate da Cournot, Bertrand e Edgeworth a queste forme di mercato, Fellner propone un modello di comportamento delle imprese che fa propri alcuni principi della teoria di von Stackelberg. Al concetto di leadership egli sostituisce però la definizione di un 'quasi-agreement' tra 'follower' e 'leader', che solo colludendo, almeno in modo informale, possono accrescere i loro profitti congiunti. Questo comportamento, che sostituisce quello ottimizzante delle imprese in concorrenza perfetta, è adottato dalle imprese a causa dell'incertezza che deriva dall'interdipendenza congetturale e della presenza di incentivi diversi dalla massimizzazione del profitto. Tra questi ultimi, Fellner adduce, a sostegno della sua teoria, la ricerca di determinati margini di sicurezza di profitto, la presenza di obiettivi di lungo periodo, l'esistenza di interessi di tipo manageriale, il desiderio di evitare politiche 'cut-throat'⁴²². Come si articola in concreto questa forma parziale di cooperazione è un problema che però Fellner non affronta teoricamente, rimandandone la definizione a variabili di tipo empirico, come le caratteristiche psicologiche degli agenti economici e quelle, soprattutto di carattere extra-economico, che sottostanno ai loro rapporti reciproci.

Questa teoria che, come dimostra J. W. Friedman⁴²³ negli anni '70, può essere rappresentata tramite la teoria dei giochi, arriva perciò ad una sostanziale indeterminatezza delle proprie conclusioni per l'assenza di una struttura matematico-formale. L'atteggiamento di Fellner rispetto alla teoria dei giochi è lo stesso che caratterizza molti dei commenti immediatamente successivi alla pubblicazione di *Theory of Games*:

the von Neumann-Morgenstern analysis has not so far been presented in a form in which economists could find it directly applicable to their problems⁴²⁴.

Hans Brems riprende nel 1951 le idee di Fellner, sostenendone la validità anche sulla base di una conoscenza più approfondita del lavoro di von Neumann e Morgenstern. Ciò che Brems ritiene necessario per lo sviluppo di un'analisi dell'oligopolio è l'introduzione esplicita nei

modelli economici di ipotesi più realistiche sul comportamento degli imprenditori: in particolare, quella di informazione incompleta e di avversione al rischio. Queste assunzioni vengono invece ignorate dal lavoro di von Neumann e Morgenstern che fondano i loro risultati sul fatto che l'unica variabile che determina il comportamento di un giocatore è la massimizzazione della speranza matematica del pagamento di un gioco. In questo modo la teoria dei giochi ignora il ruolo fondamentale svolto dalle aspettative nei mercati oligopolistici⁴²⁵ e non assegna alcuna valutazione, nè positiva nè negativa, all'incertezza, che rappresenta invece una determinante dei comportamenti delle imprese⁴²⁶.

Anche le critiche rivolte da Herbert Simon, fondatore negli anni '50 della teoria della razionalità limitata, a von Neumann e Morgenstern si fondano sull'assunzione di informazione completa che caratterizza la loro teoria. Sebbene Simon riconosca che Theory of Games ha attratto molta attenzione sulla teoria del comportamento razionale e sancito l'introduzione del metodo assiomatico in economia, la sua opinione è che quell'approccio è fondamentalmente "wrongheaded". Assumendo che l'individuo decida il proprio comportamento selezionando una strategia da un insieme di alternative definito oggettivamente e che ad ogni alternativa corrispondano conseguenze certe, la teoria dei giochi commette lo stesso errore della teoria economica neoclassica: "to erect a theory of human choice on the unrealistic assumptions of virtual omniscience and unlimited computational power"⁴²⁷.

Se Simon imputa alla teoria dei giochi un errore simile a quello commesso dall'analisi neoclassica, una posizione non meno critica viene espressa dagli autori di Linear Programming and Economic Analysis, Dorfman, Solow e Samuelson, che di quella scuola possono essere considerati i moderni interpreti. Essi condividono l'idea che "when it comes to economic problems, for which the theory was originally designed, the value of its contribution is more in doubt."⁴²⁸. A rendere difficile l'applicazione in economia della teoria dei giochi è il fatto che von Neumann e Morgenstern non offrono un valido metodo di soluzione per i giochi a n persone, costruendo solo un modello di formazione delle coalizioni⁴²⁹. Non è quindi sorprendente se:

the 13 years that have elapsed since the publication of The Theory of Games have seen no important applications of game theory to concrete economic problems. The theory of games has had a profound impact on statistics and on military sciences; in economics it is still merely a promising and suggestive approach⁴³⁰.

Questo giudizio, condiviso anche da Luce e Raiffa, autori del testo più completo sulla teoria dei giochi apparso negli anni '50, Games and Decisions⁴³¹, può essere confutato solo parzialmente. Le difficoltà incontrate dagli economisti nell'apprendimento degli strumenti ideati da von Neumann e Morgenstern, dovute alla profonda novità delle nozioni logico-matematiche impiegate, rappresentano certamente una delle principali cause dell'assenza di applicazioni della teoria dei giochi ai mercati oligopolistici. Ma le posizioni critiche appena esposte hanno in comune un altro aspetto: considerano Theory of Games un lavoro compiuto e ne misurano, senza mediazioni, la diretta applicabilità all'economia. E' però già stato evidenziato che quell'opera rappresenta 'solamente' la fondazione di un nuovo linguaggio matematico e che non rientra tra le sue ambizioni quella di avere determinato uno strumento immediatamente impiegabile nelle scienze sociali. I risultati raggiunti da von Neumann e Morgenstern sono infatti basati su ipotesi restrittive (informazione

perfetta, simmetria tra i giocatori, cooperazione in presenza di pagamenti collaterali, ecc.), utili per formulare inizialmente la loro teoria, ma la cui rimozione, chiaramente indispensabile per un'estesa applicazione alle scienze sociali, viene rinviata alla ricerca successiva.

Chi riesce a compiere almeno parzialmente questo passo in avanti negli anni '50 è Martin Shubik, i cui scritti rappresentano una notevole eccezione nella letteratura della teoria dei giochi applicata all'economia. L'inizio della sua attività scientifica coincide con la discussione della tesi di dottorato, *Competition and the Theory of Games*, presentata nel 1953 all'università di Princeton e parzialmente riproposta in *Strategy and Market Structure*, edito nel 1959. Ma la lettura del suo primo lavoro, mai pubblicato integralmente, dimostra la grande mole di lavoro svolta già nei primi anni del decennio sulla teoria delle forme di mercato imperfette.

Shubik propone un mutamento della stessa terminologia economica, che consenta di affrontare in maniera unificata, attraverso la teoria dei giochi, l'analisi delle varie forme di mercato⁴³². Il nuovo strumento permette infatti di superare la tradizionale distinzione tra concorrenza perfetta e imperfetta, studiando il funzionamento di tutte le forme di mercato, dal duopolio alla concorrenza perfetta alla Walras, attraverso il concetto più generale di competizione. Ciò che è necessario per una sua applicazione in economia è la sostituzione del concetto neoclassico di equilibrio con quello di soluzione del gioco e di quello di profitto con quello di pagamento del gioco. Con questo apparato, Shubik analizza, in ordine successivo, il monopolio bilaterale, il duopolio, l'oligopolio e la concorrenza pura, applicando a queste diverse forme di mercato gli stessi metodi di soluzione: il punto di equilibrio di Nash per i modelli di tipo non cooperativo, la soluzione di Nash al 'bargaining problem' e la teoria delle coalizioni di von Neumann e Morgenstern per i modelli cooperativi.

Tralasciando la prima forma di mercato, il monopolio bilaterale, per il quale si rinvia al paragrafo successivo, lo studio del duopolio viene discusso ipotizzando prima una competizione basata sulle variazioni di quantità prodotte⁴³³, descritta attraverso le soluzioni proposte dalla teoria neoclassica e mediante i giochi cooperativi di von Neumann e Morgenstern e di Nash. Shubik descrive anche il modello di Cournot, notandone la coincidenza con il risultato previsto dall'equilibrio di Nash per i giochi non cooperativi⁴³⁴. Vengono poi elaborati alcuni modelli di competizione di prezzo, che presentano attraverso la teoria dei giochi i contributi classici di Edgeworth e Bertrand. Sebbene la trattazione di Shubik non approfondisca le conseguenze matematiche delle varie teorie, essa offre comunque un quadro completo delle potenzialità del nuovo strumento nell'analisi di questi mercati. Lo stesso approccio viene poi riproposto per l'oligopolio e i mercati concorrenziali in genere, che vengono rappresentati mediante i giochi a n persone.

Alla parte dedicata alla teoria dell'impresa, Shubik fa seguire un'analisi, sempre fondata sulla teoria dei giochi, dell'effetto sugli equilibri di mercato delle varie imperfezioni possibili: il capitolo IV è dedicato ad un'introduzione dedicata al problema dell'informazione; il capitolo V alla definizione teorica della differenziazione del prodotto, delle scelte di locazione e della pubblicità. Infine la tesi di Shubik presenta un'applicazione di un gioco in forma estesa all'analisi dinamica del comportamento delle imprese. Nel modello costruito, un 'dynamic ruin game', un gruppo di imprese, che competono tra loro variando le quantità prodotte, iniziano il gioco con una certa ricchezza iniziale. Un'impresa

viene considerata 'fallita' e quindi esclusa dal gioco quando la sua dotazione diventa inferiore ad un certo ammontare. Le difficoltà nel definire i processi di interazione nel tempo fra le imprese vengono chiaramente riconosciuti da Shubik⁴³⁵, che offre comunque un prezioso strumento di lavoro per gli sviluppi futuri.

Quando, nel 1959, Shubik dà forma editoriale alla sua tesi, egli riprende molti dei concetti già espressi nel 1953, introducendo anche alcune significative novità. Una valutazione dell'importanza che Strategy and Market Structure riveste per l'introduzione della teoria dei giochi nell'economia è contenuta nella premessa al libro firmata da Oskar Morgenstern. Per il coautore di Theory of Games, il principale merito di Shubik è quello di avere tradotto in una terminologia 'game-theoretical' la dottrina tradizionale mostrando che ciò permette un avanzamento significativo della possibilità di comprendere il comportamento dei sistemi economici⁴³⁶. Questo risultato non rappresenta però una reale applicazione della teoria dei giochi: esso costituisce piuttosto un presupposto fondamentale per la ricerca futura. Morgenstern spiega lo stato arretrato in cui si trova ancora l'applicazione in economia del nuovo strumento facendo nuovamente riferimento allo 'standard of modesty' che ispirava la sua collaborazione con von Neumann:

Since the appearance of the Theory of Games and Economic Behavior, over 1000 books and articles have been published in this new field. Most of these deal with the mathematical aspects of the theory which they expound and develop. It is natural that applications come later, especially to so difficult a matter as economics. Here further development of the theory and application are often so inseparable⁴³⁷.

Shubik ha ben presente in tutto il suo libro la fase introduttiva in cui si trova ancora l'applicazione della teoria dei giochi all'economia. Il suo obiettivo è perciò più quello di presentare un'ampia rassegna sulle possibilità di sviluppo futuro che non di ottenere risultati definitivi. I modelli di duopolio e di oligopolio discussi nella tesi di dottorato vengono ripresentati e ad essi si aggiunge un accenno a modelli in cui le imprese hanno la possibilità di competere contemporaneamente attraverso variazioni di quantità e variazioni di prezzi. Lo spazio dedicato ai giochi non cooperativi viene ampliato, anticipando così una delle caratteristiche principali della teoria dei giochi odierna.

Un'estensione originale è quella che considera mercati aperti all'entrata di nuove imprese, definite da Shubik con il termine di 'firms-in-being'. La tecnica suggerita per formalizzare questo fenomeno è di considerare giochi con punti di equilibrio in cui non tutti i giocatori sono attivi nella produzione e di studiare poi quali condizioni influenzano il sentiero di entrata delle imprese inattive.

Rispetto alla tesi del '53, la parte dedicata all'analisi dinamica viene ampliata ed ai 'dynamic ruin games' vengono sostituiti i 'survival games'⁴³⁸. Infine Shubik presenta uno studio statistico sulla struttura dell'industria americana, che rappresenta la prima applicazione empirica della teoria dei giochi.

L'insieme di questi contributi, anche se spesso presentati da Shubik in modo schematico e parziale, consente di assegnare a Strategy and Market Structure il ruolo di primo importante contributo alla fondazione di una scienza economica fondata sulla teoria dei giochi.

Un'altra eccezione significativa per mitigare il giudizio negativo espresso dagli autori di *Linear Programming and Economic Analysis* sull'applicazione della teoria dei giochi all'economia negli anni '50 è rappresentata dai lavori di Hans Neisser e Alexander Henderson. Anche nei loro contributi l'impiego del nuovo strumento in economia si origina da una critica al principio del minimax. Neisser presenta nel 1952 un modello di duopolio in cui la 'lotta a la corde' prevista in *Theory of Games* viene sostituita da una 'lotta pacifica'. Gli argomenti che Neisser presenta per giustificare la tacita collusione, che sembra caratterizzare l'apparente stabilità di questi mercati, sono simili a quelli discussi da Fellner nel suo libro del 1949: la presenza di incertezza nei mercati oligopolistici, la consapevolezza da parte dei duopolisti che un comportamento fondato sull'ipotesi di variazione congetturale alla Bowley non permette lo stabilirsi di alcun stabile equilibrio di mercato ed il conseguente indebolimento del principio di massimizzazione del profitto. Ma la sua discussione adotta esplicitamente le formule di soluzione dei giochi a due persone a somma costante e di quelli a somma variabile. Il primo caso viene però considerato improbabile in duopolio, mentre nel secondo caso il principio del minimax proposto da von Neumann e Morgenstern non consente di rappresentare il reale andamento di questo tipo di mercato. Il duopolista si ispira piuttosto ad un diverso principio di minimizzazione del rischio, che corrisponde negli scacchi allo stile di gioco definito 'jeu sur position'. Ognuno dei due cerca di persuadere l'avversario ad assumere una posizione di dipendenza, e lo stabilirsi di un equilibrio, comunque sempre precario, dipende dai

données sociales et psychologiques additionnelles transformant les efforts de persuasion, et leur réussite éventuelle, en un action rationnelle"⁴³⁹.

Neisser offre comunque solo un presentazione elementare di un gioco di duopolio, ricorrendo parallelamente anche al tradizionale metodo di esposizione grafico.

L'approfondimento del significato dell'applicazione della teoria dei giochi ad un modello di duopolio è contenuto in un articolo di Henderson del 1954, che rimane però per la scomparsa del suo autore un contributo isolato⁴⁴⁰. Il modello proposto in *The Theory of Duopoly* presenta un nuovo concetto di soluzione, che si propone di tradurre matematicamente la tendenza alla collusione presente nei mercati oligopolistici. Il duopolio studiato da Henderson corrisponde ad un gioco rappresentato dalla seguente matrice dei pagamenti, nella quale i giocatori A e B competono attraverso la variazione dei prezzi 1, 2 e 3:

		Prezzo di A		
		1	2	3
Prezzo di B	1	50, 100	54, 125	-50, 40
	2	75, 112	60, 115	-30, 20
	3	-90, 120	-100, 150	-80, 90

I tre tipi di soluzione proposti dalla teoria dei giochi sono:

- a) minimax, che impone di adottare $(A3, B3)$, evidentemente svantaggioso per entrambi;
- b) massimizzazione congiunta $(A1, B2)$ con un profitto totale uguale a 187, che può essere redistribuito attraverso pagamenti collaterali;
- c) equilibrio di Nash, che coincide con il minimax $(A3, B3)$ e ne condivide la subottimalità.

Henderson propone invece di determinare una soluzione escludendo prima quei risultati a cui sono associati pagamenti peggiori di almeno un altro risultato per entrambi le parti, applicando in questo modo la condizione di ottimo paretiano. Le coppie selezionate attraverso questo metodo sono quattro: A sceglie 2 e B sceglie 1, 2 o 3, oppure A sceglie 1 e B sceglie 2. Sulla base di questo insieme di scelte è possibile definire un livello di profitto minimo per i duopolisti, che corrisponde a $(-100, 112)$. Stabilito questo limite inferiore, Henderson determina un unico equilibrio chiedendosi, per ogni giocatore, quale sarà il rendimento ottenuto per ogni sua scelta se l'avversario massimizza il suo rendimento. Il valore massimo tra quelli selezionati viene assunto come limite superiore della soluzione, che nell'esempio considerato, corrisponde a $(-80, 125)$. Tra i due limiti così definiti è compreso un solo elemento tra quelli selezionati con la prima procedura: $(A2, B1)$, a cui corrispondono pagamenti di 54 per A e di 125 per B.

Sebbene questa soluzione presenti problemi di generalità di applicazione, essa propone un criterio diverso da quello di massimizzazione dei profitti. Il comportamento dei duopolisti si conforma ad una sorta di 'moralità economica', che impone la rinuncia al loro immediato vantaggio per stabilire una tacita collusione che permette vantaggi di lungo periodo. Henderson ricava dall'osservazione empirica numerose conferme di questo principio di comportamento: i ribassi di prezzo vengono, per esempio, solitamente evitati per evitare comportamenti ritorsivi da parte dei concorrenti.

L'idea che i mercati oligopolistici possano essere definiti teoricamente attraverso la ricerca di regole di collusione tacita rappresenta una delle principali caratteristiche della riflessione economica del periodo. L'influenza del libro di von Neumann e Morgenstern caratterizza quindi, con l'unica eccezione di Shubik, le applicazioni economiche del periodo. L'importanza di Theory of Games viene confermata anche nella teoria delle altre due forme di mercato che iniziano ad applicare la teoria dei giochi negli anni '50: la teoria del monopolio bilaterale e quella dell'equilibrio competitivo, che sono oggetto dei prossimi paragrafi.

5.4 Modelli di monopolio bilaterale

La ricerca di una soluzione definita al processo di contrattazione caratterizza, nella storia della teoria dei giochi matematica degli anni '50, un ampio numero di pubblicazioni. Dall'impulso costituito dal contributo originale di Nash si originano varie proposte di 'schemi di arbitraggio', delle quali questo lavoro ha presentato nel paragrafo 5.2 solo una rassegna parziale. Nonostante questa intensa attività teorica, la formulazione di modelli economici di monopolio bilaterale fondati sulla teoria dei giochi si limita a pochissimi esempi. Anche i due autori più significativi dell'analisi della contrattazione, Nash e Schelling,

non presentano applicazioni delle loro teorie, assumendo al proposito un atteggiamento simile. Nelle prime righe di *The Bargaining Problem*, Nash scrive:

The economic situations of monopoly versus monopsony, of state trading between two nations, and of negotiation between employer and labor union may be regarded as bargaining problem⁴⁴¹.

Dopo questa introduzione, Nash però non presenta modelli economici di contrattazione. Anche Schelling nel suo articolo *An Essay on Bargaining* elenca le potenziali applicazioni della sua teoria:

In economics the subject covers wage negotiations, tariff negotiations, competition where competitors are few, settlements out of court, and the real estate agent and his customer⁴⁴².

Ma in tutte le successive pubblicazioni, la sua attenzione si limita alle applicazioni militari⁴⁴³, riservando a quelle economiche solo il ruolo di saltuario supporto empirico per le proprie teorie⁴⁴⁴.

Una significativa eccezione alla penalizzazione riservata all'economia è costituita da un articolo pubblicato su *Econometrica* nel 1956, in cui John Harsanyi presenta una discussione del concetto di soluzione ideato da Nash per i giochi cooperativi. Harsanyi dimostra che la soluzione di Zeuthen al problema della contrattazione è matematicamente equivalente a quella data da Nash nei suoi due articoli del 1950 e del 1953. Nel modello di Zeuthen⁴⁴⁵, il processo di negoziazione dei salari tra lavoratori e datori di lavoro dall'uguaglianza si conclude quando i rispettivi indici di massimo rischio che le parti sono disposte a sopportare si uguagliano, ma non si offre una spiegazione dell'effetto delle influenze reciproche e delle eventuali minacce sul risultato finale. Nash riesce invece a formalizzare questo aspetto fondando il processo di contrattazione proprio sulla presenza di minacce alternative⁴⁴⁶. In un gioco cooperativo, nel quale, per definizione, i giocatori possono comunicare e stabilire impegni vincolanti prima dello svolgimento del gioco, attraverso le minacce è possibile definire un punto di origine della contrattazione. Sulla base di quest'ultimo e nell'ambito dell'insieme ammissibile, l'accordo tenderà a fissarsi nel punto che rende massimo il prodotto delle utilità che ciascuno dei contraenti ascrive al suo guadagno netto.

Harsanyi dimostra che i due diversi procedimenti conducono ad identiche predizioni e traduce inoltre in forma assiomatica il modello di Zeuthen. La dimostrazione dell'analogia tra il modello matematico di Nash e quello 'psicologico' di Zeuthen offre ad Harsanyi lo spunto per esprimere con chiarezza i motivi che possono favorire l'attenzione degli economisti alla teoria dei giochi ed al metodo assiomatico in generale:

The abstract axiomatic method should primarily be regarded as a heuristic device. If it can be shown that there is, consistent with peoples' behaviour in a certain situation, one and only one hypothesis satisfying certain attractive general postulates (whether formal postulates based on considerations of mathematical simplicity, continuity, symmetry, determinateness, etc., or 'material' postulates suggested by observation or introspection), this is a strong argument for this particular hypothesis - or at least against any alternative ones - even if no convincing psychological model is known which would explain the behaviour predicted by this hypothesis. Of course, if a satisfactory psychological

model is also found, this will further increase our confidence in the hypothesis. But the converse is equally true⁴⁴⁷.

Il contributo più importante di Theory of Games, l'introduzione dell'approccio assiomatico nell'analisi economica, può quindi permettere una concreta unificazione dell'analisi dei mercati:

No economic theory in relying on the concepts of orthodox economics alone could possibly cover such prima-facie different phenomena as duopoly, bilateral monopoly, etc., by the same argument; this is possible only on the higher level of abstraction adopted by the theory of games⁴⁴⁸.

Proseguendo nella sua discussione, Harsanyi offre una valutazione del significato economico delle due teorie, che sintetizza in tre punti:

a) ciò che determina le condizioni dell'accordo è l'attitudine delle due parti verso il rischio;

b) entrambe offrono la possibilità di quantificare con esattezza il valore economico della capacità di un soggetto di esercitare pressioni su altri soggetti;

c) consentono la previsione di alcuni tipi di sviluppi dinamici, includendo una valutazione dell'effetto dei comportamenti ottimali sulle contrattazioni future: per esempio, le grandi imprese tenderanno ad adottare un comportamento intransigente nelle contrattazioni con le aziende più piccole, per instaurare una posizione di dominanza.

L'applicazione del concetto di soluzione di Nash al mercato di monopolio bilaterale è oggetto anche di due diversi lavori di Martin Shubik: il suo libro del 1959 ed un articolo pubblicato su Econometrica nel 1952.

In Strategy and Market Structure - e, prima, nella sua tesi del 1953 - Shubik paragona l'equilibrio determinato in questo tipo di mercato dalla teoria di Nash con quello prescritto da von Neumann e Morgenstern. Il procedimento adottato in Theory of Games amplia l'intervallo definito dalle coppie marginali di Bohm-Bawerk, senza individuare un unico equilibrio all'interno di questo insieme. La soluzione di Nash riesce invece a determinare un risultato univoco attraverso l'impiego del concetto di minaccia. Nella traduzione letteraria di Shubik, il procedimento descritto da Nash inizia quando i due imprenditori si informano reciprocamente sull'azione di minaccia che ognuno di loro è pronto ad attuare se il risultato della cooperazione non verrà giudicato soddisfacente. I pagamenti corrispondenti a questa ipotesi di 'non-accordo' costituiscono la base che permette di distribuire equamente i guadagni netti provocati dalla cooperazione.

Per illustrare la differenza tra i due tipi di soluzione, Shubik mostra anche un esempio numerico. Egli considera due industrie, la prima fornitrice della seconda, con le seguenti funzioni di costo medio:

$$\begin{aligned}AC1 &= 4/q + 4 - 0,99 (q-q2) \\AC2 &= 5 - 0,01 (q-q2)\end{aligned}$$

La funzione di domanda per la produzione della seconda impresa è data da:

$$p = 20 - q$$

Secondo la soluzione di von Neumann e Morgenstern, le due imprese tenderanno a colludere per ottenere il valore massimo del profitto

congiunto $P = P_1 + P_2 = pq - q (AC_1 + AC_2)$, uguale a 11,34 e che si verifica con $q=1,915$ e $p=18,09$. Il livello minimo di profitto che le imprese possono conseguire è quello che corrisponde ad uno scambio nullo: in questo caso la prima impresa deve sopportare i costi fissi che hanno valore 4, mentre la seconda impresa, che non possiede impianti produttivi, ottiene profitti nulli. La conclusione di von Neumann e Morgenstern è che ogni divisione del massimo profitto congiunto che assegna alle due imprese valori superiori od uguali rispettivamente a $(-4,0)$ è possibile.

Anche secondo Nash le imprese tenderanno a massimizzare i profitti congiunti, ma la sua soluzione permette di determinare la distribuzione interna dei guadagni della cooperazione. L'ipotesi di non-accordo, a cui corrisponde il vettore dei pagamenti $(-4,0)$, rappresenta infatti la base per calcolare un'equa divisione dei profitti. Nel diagramma presentato da Shubik⁴⁴⁹, P_1 è uguale a 7,86 e P_2 a 3,48, valori che permettono di determinare, oltre a $p=18,09$, anche il prezzo praticato dall'impresa 1 all'impresa 2 ($p_1=8,91$). Sebbene il risultato dall'applicazione del principio di Nash abbia evidentemente carattere normativo - indichi cioè una soluzione 'equa' - esso permette, a differenza alla teoria di von Neumann e Morgenstern, di determinare una soluzione.

L'altro lavoro in cui Shubik applica la soluzione di Nash è un modello di ciclo economico, in cui egli affronta lo stesso problema descritto da Zeuthen nel 1930, la contrattazione del salario fra sindacati e datore di lavoro. Il 'labour-entrepreneur game' - come viene definito da Shubik - viene presentato in due versioni, una ad informazione completa e l'altra ad informazione incompleta.

Lo spazio di contrattazione definito da von Neumann e Morgenstern è compreso, in questo caso, tra un valore minimo dipendente per il datore di lavoro dal costo di mantenimento del capitale fisso e per il sindacato da fattori che variano in funzione diretta del ciclo economico (patrimonio finanziario del sindacato, disponibilità personali dei lavoratori, monte-liquidazione), ed un valore massimo che è determinato, per entrambe le parti, in funzione del ciclo economico. Con informazione completa, la soluzione presentata in Theory of Games esclude il verificarsi di conflitti, ma essa non indica la distribuzione interna dei pagamenti del gioco. Se vale invece l'ipotesi di informazione incompleta, l'unica possibilità che si verifichi uno sciopero è quella in cui una o entrambi le parti ritengono che certe imputazioni, esterne allo spazio di contrattazione, vi siano invece comprese.

Per applicare allo stesso problema il concetto di soluzione di Nash, Shubik adotta un'altra ipotesi: il valore della minaccia del datore di lavoro varia in funzione inversa del ciclo economico, mentre quello della minaccia del sindacato varia in funzione diretta del ciclo. Se vale l'ipotesi di informazione completa, lo sciopero o la serrata non si verificherebbero mai poiché esse provocherebbero una perdita per entrambi. La divisione dei profitti tra datore di lavoro e lavoratori muterà invece in funzione del ciclo economico. Introducendo condizioni di informazione incompleta compare invece una 'zona di pericolo', all'interno della quale possono verificarsi scioperi o serrate. Riprendendo in parte il modello di Zeuthen, Shubik distingue tra due situazioni di 'bassa informazione': nella prima, entrambe le parti sovrastimano il potere di contrattazione dell'altra - che, nell'analisi di Zeuthen, corrispondeva alla capacità di sopportare il rischio di un conflitto - e ciò evita il rischio di sciopero o di serrata; nella seconda entrambe le parti sottostimano il potere dell'avversario e la conseguente alta probabilità di conflitto ha ripercussioni anche sul livello del ciclo economico. La conclusione di

Shubik è che la possibilità per un giocatore di massimizzare il suo pagamento in una situazione di contrattazione dipende strettamente dal suo stato di informazione e di questo aspetto deve occuparsi in futuro la teoria dei giochi economica:

Game models with incomplete information concerning payoffs appear to be the type of model that merits much study in the eventual development of economic theory⁴⁵⁰.

La felice previsione di Shubik può offrire un elemento di riflessione per comprendere meglio la distanza che separa negli anni '50 gli economisti che studiano i modelli di monopolio bilaterale dalla teoria dei giochi. I modelli che fanno riferimento al nuovo strumento matematico si fondano su ipotesi 'forti': essi assumono sempre giocatori razionali, che possiedono informazione completa, sia rispetto alla funzione dei pagamenti che alla dimensione della matrice del gioco, e che comunicano con procedimenti fortemente stilizzati. Queste semplificazioni, tese a ridurre l'indeterminatezza causata dall'interazione strategica, non riescono però ugualmente a condurre i modelli a predizioni univoche. L'ulteriore strumento adottato a questo fine è, specialmente nella prima fase del decennio, quella di introdurre nel gioco una serie di regole che l'accordo finale deve soddisfare e che conducono agli schemi di arbitraggio di Nash, Raiffa, Luce, Braithwaite⁴⁵¹; nella seconda metà degli anni '50, a dimostrazione dei risultati solo parziali raggiunti, la ricerca di Schelling e Rapoport abbandona l'obiettivo di ricercare una soluzione determinata, rivolgendosi più ad una riconcettualizzazione e ad un'analisi empirica del problema⁴⁵². L'economia tradizionale prosegue invece sulla strada tracciata da Zeuthen, che tende a descrivere il meccanismo con cui le parti convergono, attraverso reciproche concessioni, verso un accordo. Questi modelli ipotizzano quindi fin dall'inizio una situazione di incertezza e tentano di formalizzare il processo dinamico di apprendimento che consente di raggiungere un accordo finale⁴⁵³. La mancanza di interscambio tra i due ambiti è dovuta perciò ad una differenza sostanziale sulle ipotesi relative all'informazione e, quindi, sulla metodologia usata.

L'accesa polemica che si sviluppa nel 1958 tra Harvey Wagner e Harsanyi sulle colonne del Southern Economic Journal è una chiara testimonianza dei contenuti di questa 'querelle'⁴⁵⁴. Mentre Harsanyi ribadisce il valore descrittivo della teoria di Nash, Wagner sostiene che i modelli presentati in teoria dei giochi sono esclusivamente di tipo normativo. I limiti dovuti all'iniziale fase di sviluppo della teoria dei giochi richiedono infatti di ridimensionare l'incertezza presente, per esempio, nel modello di Zeuthen, per tradurlo in un problema di pura massimizzazione⁴⁵⁵. Proprio Harsanyi, comunque, dimostrerà negli anni '60 come sia possibile introdurre nella teoria dei giochi l'ipotesi di informazione incompleta, pervenendo al concetto di equilibrio bayesiano⁴⁵⁶. Con quel contributo i motivi che giustificano la separazione tra l'analisi economica della contrattazione e la teoria dei giochi sembrano, almeno parzialmente, essere venuti meno.

5.5 L'equilibrio economico generale e il 'core'

The von Neumann-Nash tradition had created tools. Once the tools are there, somebody is bound to pick them up.

Kenneth J. Arrow

Le novità introdotte da *Theory of Games and Economic Behavior* nell'analisi economica sono rappresentate da due aspetti, uno relativo all'economia e l'altro all'analisi matematica, riconducibili separatamente ai due autori del libro. Morgenstern è il principale fautore del superamento della teoria economica neoclassica, della quale la teoria dei giochi si propone di confutare alcune conclusioni; alla geniale mente matematica di von Neumann va invece riconosciuto il merito di avere modificato il patrimonio matematico dell'economista, introducendo in esso il metodo assiomatico e la 'logistics'.

Negli anni '50, questi due programmi di ricerca, distinti solo per esigenze di ricostruzione storica ma intimamente legati tra loro, vengono sviluppati secondo accenti diversi nei vari settori dell'analisi economica. Le aree tematiche descritte nei due paragrafi precedenti comprendono immediatamente, anche se questa coscienza è limitata a pochi autori, l'unitarietà che caratterizza l'opera di von Neumann e Morgenstern. Nella teoria dei mercati oligopolistici di Shubik ed in quella della contrattazione di Harsanyi, l'adozione dei nuovi strumenti matematici porta al parziale abbandono dei principi dell'economia neoclassica e il loro lavoro rappresenta il primo passo verso la fondazione di un'economia svincolata dalle tradizioni ottocentesche. Nella teoria della concorrenza perfetta e nella teoria della decisione è invece solo il programma di ricerca attribuibile a von Neumann che viene accolto ed applicato.

La dimostrazione dell'esistenza di un equilibrio per un'economia competitiva è un primo significativo esempio di questa relazione dimezzata tra l'economia e la teoria dei giochi. Nel 1954, Arrow e Debreu pubblicano uno degli articoli più importanti dell'intera storia dell'analisi economica. Il risultato raggiunto dai due economisti rappresenta l'atto finale di una lunga evoluzione che inizia con la dimostrazione dell'equilibrio economico generale di Walras e che si sviluppa negli anni '20 e '30 attraverso una serie di contributi che tentano di risolvere le imperfezioni matematiche della teoria originaria⁴⁵⁷. Per pervenire ad una sistemazione definitiva di questo problema centrale della teoria neoclassica, Arrow e Debreu impiegano due nuovi strumenti matematici: il teorema del punto fisso, elaborato da Kakutani nel 1941 sull'originale enunciazione di Brouwer ed impiegato da Nash per il teorema di esistenza del punto di equilibrio, e la teoria dei giochi. La loro dimostrazione è basata sul concetto di 'economia astratta', che rappresenta una generalizzazione della definizione di gioco contenuta in *Theory of Games*:

An abstract economy, then, may be characterized as a generalization of a game in which the choice of an action by one agent affects both the payoff and the domain of actions of other agents⁴⁵⁸.

Il programma enunciato con queste parole da Arrow e Debreu non riceve però una realizzazione compiuta. L'impiego di uno schema della

teoria dei giochi viene limitato alla determinazione della funzione di domanda. Mentre nella teoria neoclassica la teoria del consumo è costruita sul principio di massimizzazione dell'utilità considerati costanti i prezzi e il reddito, nell'articolo di Arrow e Debreu queste due ultime variabili cessano di essere considerate costanti e vengono espresse in funzione delle scelte degli altri consumatori. Una modellizzazione di questo tipo considera, però, solo in modo parziale l'interdipendenza esistente tra gli agenti economici, cogliendo solo una delle molte potenzialità della teoria dei giochi⁴⁵⁹. Innanzitutto un ambito teorico come quello del consumo, in cui le complesse interrelazioni tra gli individui dipendono da variabili psicologiche individuali, è difficilmente schematizzabile attraverso una semplice relazione funzionale tra strategie e pagamenti; inoltre l'interazione strategica tra le unità produttive viene esclusa dal modello ricorrendo alla stessa artificiale adozione del processo di 'tatonnement' presente nel sistema di Walras. L'economia astratta definita da Arrow e Debreu corrisponde infatti ad un gioco a $m+n+1$ partecipanti, nel quale m consumatori scelgono una strategia da un insieme finito di vettori alternativi di consumo ricevendo un pagamento definito in termini di utilità, le n unità produttive adottano un vettore di produzione ottenendo un profitto e il 'market participant' - il banditore walrasiano - determina il vettore dei prezzi di equilibrio.

L'altra relazione, ed in conclusione la sola significativa, tra la dimostrazione di Arrow e Debreu e la teoria dei giochi è rappresentata dall'impiego dei concetti di soluzione di un gioco elaborati negli anni '50. L'adozione del modello a $m+n+1$ giocatori permette di ricondurre il teorema di esistenza di un equilibrio competitivo al teorema di esistenza di un 'punto di equilibrio' di Nash. Impiegando questo strumento, Arrow e Debreu dimostrano due teoremi:

1) se ogni giocatore dispone inizialmente di una dotazione iniziale di tutti i beni vendibili, allora il gioco ammette un punto di equilibrio;

2) in presenza di lavoro, il punto di equilibrio esiste se sono ammessi due tipi di lavoro con le seguenti proprietà: a) ogni individuo può offrire una quantità positiva di almeno un tipo di lavoro, b) ogni tipo di lavoro ha un'utilità positiva nella produzione di merci desiderate.

Nel gioco presentato, il punto di equilibrio equivale ad un equilibrio competitivo ed è perciò il teorema del punto fisso di Kakutani nella forma in cui viene applicato da Nash nel 1950 a permettere la soluzione del modello⁴⁶⁰. Lo stesso Arrow offre, in un'intervista raccolta da George Feiwel nel 1987, una conferma a questa interpretazione:

I read, first von Neumann, but especially Nash's 1950 paper. It suddenly struck me: 'This is very much like the problem of competitive equilibrium'. I thought about it on and off, until one day, when I had a few free hours, I thought how to interpret competitive equilibrium as a game. After a number of steps, you can take Nash's result and apply it⁴⁶¹.

Un'ulteriore prova del ruolo limitato svolto dalla teoria dei giochi all'interno della dimostrazione dell'equilibrio competitivo è offerta dalle successive elaborazioni del modello presentato nel 1954. Lo stesso Debreu pubblica nel 1959 Theory of Value, che può essere considerato una 'summa' della teoria neoclassica. In questo trattato, Debreu abbandona l'idea di 'economia astratta' e ritorna all'originaria presentazione walrasiana⁴⁶². L'unico merito che egli attribuisce, in quel

testo, a von Neumann e Morgenstern è di avere "freed mathematical economics from its traditions of differential calculus and compromises with logic"⁴⁶³, contribuendo alla creazione di una nuova matematica economica fondata sulla topologia e sull'analisi convessa⁴⁶⁴, ma evidentemente non quello di avere dimostrato l'invalidità della teoria neoclassica. Nei primi sei capitoli del suo libro, dedicati all'equilibrio competitivo, la teoria dei giochi non viene mai impiegata e la dimostrazione del teorema di esistenza assume di nuovo l'esogeneità del sistema dei prezzi. L'unico riferimento compare nel capitolo 7, dedicato alla scelta dell'agente economico in condizioni di incertezza, che viene presentata attraverso lo schema dei 'giochi contro la Natura'⁴⁶⁵. In questo modello, l'incertezza di un giocatore sulle caratteristiche dell'ambiente esterno alla sua decisione è tradotta attraverso l'introduzione in un gioco in forma estesa di una prima mossa, a cui è associata una distribuzione di probabilità sull'insieme dei possibili 'stati di Natura', costruita in base all'informazione parziale posseduta dall'agente economico.

Un secondo esempio di applicazione della teoria dei giochi all'analisi dei mercati competitivi è rappresentato dal lavoro di Martin Shubik sul 'core'. Questo concetto di soluzione per i giochi cooperativi viene formulato nel 1953 contemporaneamente da Shapley e da Gillies⁴⁶⁶, ma solo nel 1959 viene applicato all'analisi economica dimostrando la sua coincidenza con la 'curva dei contratti' di Edgeworth.

Come già evidenziato, la soluzione di Edgeworth al processo di contrattazione si fonda sulla stessa definizione di razionalità impiegata da von Neumann e Morgenstern. Nel primo caso un agente economico accetta solo quegli scambi che migliorano, o almeno non peggiorano, l'utilità corrispondente alla sua dotazione iniziale di beni; in Theory of Games, tutte le coalizioni che assicurano ad ogni membro almeno quanto quest'ultimo può assicurarsi agendo isolatamente fanno parte della soluzione. Inoltre in entrambi i casi le distribuzioni dei beni, o dei pagamenti, escluse dall'insieme delle soluzioni sono dominate da qualche distribuzione compresa nell'insieme.

Una differenza tra le due teorie⁴⁶⁷ compare invece considerando i mercati con più di due partecipanti: mentre von Neumann e Morgenstern assegnano al concetto di 'standard of behavior' il compito di ridurre ad un'unica distribuzione l'insieme così definito, Edgeworth, escludendo la possibilità di coalizioni tra gli agenti economici, sostiene che il progressivo aumento di questi ultimi riduce la molteplicità delle soluzioni possibili ad un'unica distribuzione dei beni, che determina il sistema di prezzi di un mercato perfettamente competitivo.

Shubik riprende quest'ultima affermazione e ne discute la validità applicando il concetto di soluzione di 'core'. Egli prende in considerazione, come avveniva nel modello di Edgeworth, un mercato 'simmetrico', a cui partecipano cioè due classi di giocatori di uguale numerosità e nel quale gli m giocatori appartenenti alla classe 1 iniziano il gioco con una disponibilità a e gli n giocatori appartenenti alla classe 2 con una disponibilità b . Impone inoltre al gioco la condizione che le funzioni di utilità di tutti i giocatori siano identiche tra loro.

Con queste ipotesi, Shubik dimostra una serie di teoremi. Il primo afferma che nell' 'Edgeworth market game', qualunque sia il valore di m e n , il 'core' coincide con la curva dei contratti, ma non converge necessariamente ad un unico punto poiché lascia aperta la possibilità che si creino coalizioni tra i giocatori, eventualità esplicitamente esclusa da Edgeworth⁴⁶⁸.

Nel resto del paper, Shubik ricerca le condizioni che rendono unica la distribuzione di pagamenti prevista dal 'core'. In un mercato di monopolio, con un agente del primo tipo e n agenti del secondo tipo, questa eventualità si verifica se il monopolista adotta una perfetta discriminazione di prezzo verso tutti i compratori. Nel caso invece di un'economia competitiva con $m+n$ giocatori, l'esistenza del 'core' dipende dalle condizioni tecnologiche di produzione. Se prevalgono rendimenti decrescenti, non esiste alcuna imputazione 'non dominata' ed il 'core' è vuoto:

This suggest that when decreasing returns are present everywhere the division of total product must depend upon the coalition structure, the social or political features of the economy under all circumstances⁴⁶⁹.

Con rendimenti crescenti, ci sarà sempre più di una imputazione compresa nel 'core':

This merely reflects a basic feature of an expanding economy; the value of extra individuals is sufficiently great that there will be imputations such that no subgroup of the economy can make itself better off by refusing to cooperate⁴⁷⁰.

In questo caso è necessario ricorrere ad altri strumenti, oltre alle condizioni tecnologiche della produzione, per determinare un'unica soluzione.

L'unico caso in cui il 'core' tende a determinare un'unica imputazione per effetto di un incremento progressivo del numero dei giocatori è lo stesso previsto da Edgeworth: quello in cui prevalgono rendimenti costanti di scala ed ogni individuo è ricompensato in base al valore della sua produttività marginale.

Nel 1980, Schotter e Schwödiauer, tentando una valutazione del significato storico di questo articolo, gli riconoscono il ruolo di 'vehicle' che induce una rinnovata attenzione verso le applicazioni economiche della teoria dei giochi. Nello stesso tempo, essi rilevano che la coincidenza tra i risultati di Shubik e quelli di Edgeworth rianima una posizione critica già presente nella discussione sollevata da Theory of Games:

While this result was quite elegant, it spelled the end of the first renaissance in game theory. It seemed that the game theoretical analysis (which employed strictly cooperative game theoretical concepts) was too demanding informationally to be of any intuitively appeal. Since it yielded no new results, little could be gained through its use⁴⁷¹.

Gli effetti di questa 'prima rinascita' delle applicazioni economiche della teoria dei giochi si esaurisce quindi immediatamente e continua, secondo Schotter e Schwödiauer, fino alla fine degli anni '60⁴⁷². Questo giudizio trascura comunque un elemento fondamentale degli 'Edgeworth market games'. Sebbene anche l'articolo di Shubik si limiti a introdurre nel modello di equilibrio economico generale gli strumenti matematici definiti da von Neumann e Morgenstern, esso non rientra nell'ambito teorico definito dal lavoro di Arrow e Debreu. La relazione tra queste due impostazioni è la stessa che esiste tra il modello di Walras e quello di Edgeworth. La dimostrazione ottocentesca dell'esistenza di un equilibrio economico generale, come quella di Arrow e Debreu, è costruita sull'ipotesi di esogeneità del sistema dei prezzi,

mentre Edgeworth, e con lui Shubik, definisce le condizioni di equilibrio sul principio di autodeterminazione dei singoli agenti economici, i quali determinano liberamente, attraverso la contrattazione, le condizioni di scambio. Quest'ultima concezione dell'economia di mercato, oltre ad essere più realistica, rappresenta anche un 'humus' più consono alle caratteristiche strutturali e formali della teoria dei giochi e, più che rappresentare una cesura, prelude ad una sua più ampia applicazione nella teoria economica⁴⁷³.

Un'ultima forma di applicazione della teoria dei giochi all'analisi dei mercati competitivi proviene dallo sviluppo del modello del 1938 di von Neumann sulla crescita in equilibrio. Nel 1956, Kemeny, Morgenstern e Thompson riprendono quel modello e lo generalizzano riformulandolo in forma di gioco.

La dimostrazione di von Neumann dell'uguaglianza tra l'unico tasso di crescita uniforme in equilibrio ed il tasso di interesse prevalente nella stessa economia era basata su tre ipotesi:

- 1) una quantità illimitata dei fattori produttivi naturali (terra e lavoro);
- 2) l'impiego di tutti i beni prodotti nel periodo precedente in ognuno dei processi produttivi ammessi;
- 3) la costanza al livello di sussistenza della retribuzione del fattore lavoro e il totale reinvestimento dei profitti.

Nella versione di Kemeny, Morgenstern e Thompson solo la prima ipotesi viene confermata, mentre la terza viene rimossa e la seconda sostituita da un'ipotesi più debole⁴⁷⁴. La loro dimostrazione perviene ad un teorema simile a quello di von Neumann, con una sola variazione: esiste un insieme finito di tassi di espansione dell'economia in equilibrio, ma è possibile, aggiustando il livello dei prezzi e quello della produzione, determinarne uno soltanto.

Nonostante questo parziale risultato, l'impiego della teoria dei giochi consente a Kemeny, Morgenstern e Thompson di rendere più realistico il modello di von Neumann e di presentare, nell'ultima parte del paper, una sub-aggregazione dell'economia competitiva in più settori produttivi. Il loro contributo, che è lo stesso già sottolineato per i lavori di Arrow e Debreu e di Shubik, è quindi quello di dimostrare la versatilità degli strumenti matematici elaborati dalla teoria dei giochi anche all'interno dello studio della crescita di un'economia competitiva.

5.6 La teoria delle decisioni

Adottando la classificazione proposta da Luce e Raiffa in *Games and Decisions*⁴⁷⁵, la teoria delle decisioni può essere suddivisa in varie aree di ricerca, ognuna delle quali presenta negli anni '50 una relazione con la teoria dei giochi.

Il primo criterio impiegato da Luce e Raiffa è fondato sul numero dei soggetti che devono adottare una decisione. Nella teoria della decisione individuale la principale novità teorica di *Theory of Games* è rappresentata dall'indice di utilità cardinale elaborato da von Neumann e Morgenstern e discusso nel paragrafo 4.2. Sebbene questo criterio di scelta costituisca una derivazione solo indiretta della teoria dei giochi, è proprio alla necessità di costruire un'unità di misura dei

pagamenti di un gioco che si deve la creazione di uno strumento che entra a fare parte della moderna teoria del consumo.

La dimostrazione di Arrow del famoso teorema di impossibilità della funzione di benessere sociale è parte invece della teoria della decisione collettiva. Anche questo contributo, le cui implicazioni orientano tutta la successiva letteratura sull'economia pubblica, presenta importanti relazioni con la teoria dei giochi.

Distinguendo invece i diversi settori della teoria della decisione in base alle condizioni di informazione dei soggetti coinvolti, l'intera teoria dei giochi, almeno fino agli anni '60, affronta l'analisi delle situazioni che Knight nel 1921 definisce di 'rischio'⁴⁷⁶. Gli effetti dell'introduzione di condizioni di 'incertezza' - l'assenza cioè di una distribuzione di probabilità nota sull'insieme delle conseguenze di ogni decisione alternativa - vengono analizzati all'interno della statistica, e quindi al di fuori dall'oggetto di questo studio. Ma un nuovo strumento elaborato a questo fine da Abraham Wald e John Milnor, i 'games against Nature', viene applicato all'economia da Martin Shubik. Infine i nuovi strumenti matematici ideati da John von Neumann e poi applicati alla teoria dei giochi vengono impiegati anche nell'ambito della decisione economica in condizioni di 'certezza', dando origine alla teoria della programmazione lineare.

Il teorema dimostrato da Kenneth J. Arrow in *Social Choice and Individual Values* (1951) rappresenta un punto di svolta fondamentale nella teoria dell'economia pubblica. Esso stabilisce infatti un risultato negativo che influenza profondamente la letteratura successiva. Assumendo alcune ipotesi ragionevoli (ottimalità paretiana, assenza di un dittatore, associazione positiva tra valori individuali e sociali, sovranità del consumatore, indipendenza dalle alternative irrilevanti) ed in presenza di almeno tre configurazioni sociali possibili, Arrow dimostra che non esiste una funzione del benessere che soddisfi contemporaneamente tutte queste ipotesi e produca allo stesso tempo un ordinamento di preferenze transitivo sui possibili stati della società.

L'obiettivo che Arrow dimostra essere irraggiungibile è quindi quello di costruire una procedura per aggregare un insieme di preferenze individuali in un ordinamento di preferenze che rappresenti tutti i membri della società. Le proposte presentate nella letteratura precedente erano state superate dalla critica di Bergson, che aveva messo in evidenza come l'adozione a questo fine di un qualunque criterio matematico sottintendesse sempre un implicito giudizio di valore. Arrow rovescia perciò l'approccio al problema: definisce prima un insieme di criteri di efficienza e di equità e studia poi il problema dell'esistenza di una funzione del benessere sociale che risponda a queste richieste. La sua analisi impiega quindi lo stesso metodo, quello assiomatico, che permette di costruire l'indice di utilità presentato in *Theory of Games*⁴⁷⁷.

Ma l'influenza di von Neumann e Morgenstern sulla dimostrazione di Arrow va oltre gli aspetti puramente formali, coinvolgendo gli stessi esiti finali del suo lavoro. Lo stesso progetto di scrivere una tesi di dottorato sull'economia pubblica nasce nel periodo in cui Arrow partecipa all'attività della RAND Corporation. Racconta Arrow:

When we were at Rand together, Helmer remarked that there was something that bothered him about game theory or about its applications. We wanted to talk about the US, the USSR, and Western Europe as players, but they are not like people, in what sense do they have utility functions? How can we apply game theory where it is essential to have utility functions?

Since when does the US have a utility function? 'Oh! I said', that is nothing, Abram Bergson has written on this type of thing! 'Oh', he said, 'would you write an exposition of this?'. Well, that was the thing that led to the social choice book." ⁴⁷⁸.

Nel suo libro, Arrow evidenzia un'altra relazione tra il suo teorema e la definizione di dominazione contenuta in Theory of Games:

The negative outcome expressed in this theorem is strongly reminiscent of the intransitivity of the concept of domination in the theory of multi-person games ⁴⁷⁹.

La dimostrazione teorica dell'impossibilità di stabilire un unico ordinamento di preferenza sociale è già implicita nel concetto di soluzione dei giochi a n persone elaborato da von Neumann e Morgenstern. La comune intuizione della indecifrabilità teorica della stabilità dei sistemi economici e sociali conduce però a risultati diversi nell'economia pubblica: mentre in Theory of Games questo problema viene risolto attraverso l'idea degli 'standard of behavior', Arrow non può appellarsi ad una simile razionalizzazione 'a posteriori' perché l'obiettivo del suo lavoro è di costruire schemi di carattere normativo.

La teoria dei giochi permette infine ad Arrow di delineare due possibili linee di sviluppo della ricerca futura sull'argomento. La prima è implicita nell'idea che il processo di formazione di ogni decisione politica è rappresentabile teoricamente come un gioco; questo strumento può quindi permettere una descrizione puntuale dei meccanismi che assicurano la prevalenza e la stabilità di una determinata configurazione della società ⁴⁸⁰. L'altro indirizzo di ricerca è legato al problema del 'free rider', che diventa un aspetto centrale nella successiva analisi dei 'fallimenti del mercato' ⁴⁸¹. Dopo aver adottato una determinata funzione del benessere sociale è sempre possibile che un individuo nasconda le sue preferenze reali per ottenere un trattamento più favorevole. All'interno della teoria dei giochi è possibile, secondo Arrow ⁴⁸², definire alcune regole che impongano ad ogni individuo razionale di manifestare in modo veritiero la sua funzione di utilità.

Nella teoria delle decisioni in condizioni di incertezza, il lavoro di Abraham Wald rappresenta la più diretta applicazione dei concetti di soluzione presentati in Theory of Games. In due paper, "Statistical decision functions which minimize the maximum risk" e "Foundations of a general theory of sequential decision functions" ⁴⁸³, Wald elabora un criterio originale per selezionare da un insieme di distribuzioni di probabilità sulle conseguenze di ogni decisione alternativa un'unica funzione di distribuzione. Questo problema viene reinterpretato come un gioco a somma zero al quale partecipano due giocatori, la Natura e lo statistico. La Natura seleziona un elemento x dallo spazio di stati alternativi; lo statistico deve determinare una funzione di decisione d(x) all'interno dello stesso spazio, minimizzando una funzione che esprime il rischio conseguente ad un'errata previsione di x. In condizioni di 'incertezza', la soluzione proposta da Wald è di prendere in considerazione il minimo rendimento atteso corrispondente ad ogni decisione alternativa e di scegliere quindi l'azione che massimizza questo valore.

Il modello di Wald viene sottoposto alle stesse critiche rivolte contemporaneamente all'applicazione del principio del minimax ai giochi a somma zero ⁴⁸⁴. Il suo concetto di soluzione è adeguato quando lo statistico ignora completamente le probabilità con cui la Natura

determina x , ma nella realtà è sempre disponibile una stima anche approssimata di questo valore. Inoltre la Natura, a differenza di un normale giocatore in giochi strettamente competitivi, non ha nessun interesse a ridurre le probabilità con cui lo statistico effettua un'esatta predizione di x . Il criterio del minimax appare quindi troppo pessimistico per essere considerato razionale.

Il dibattito successivo alla critica di Arrow cerca di porre rimedio a queste debolezze della soluzione di Wald. Savage⁴⁸⁵ propone di minimizzare il 'regret', perseguendo il massimo dei rendimenti possibili quando si ipotizzi che la predizione effettuata sia quella vera. Leonid Hurwicz⁴⁸⁶ suggerisce invece un criterio di decisione fondato sulla combinazione tra il migliore e il peggiore risultato possibile. Altri autori⁴⁸⁷ ripropongono la teoria di Laplace che, in condizione di incertezza, assegna uguali probabilità al verificarsi di ogni evento possibile. Un ultimo criterio viene proposto da Shackle⁴⁸⁸: l'individuo tiene conto contemporaneamente dei guadagni e delle potenziali 'sorprese' di ogni azione alternativa ed ordina queste coppie di valutazioni attraverso una mappa di indifferenza che determina la sua decisione.

Martin Shubik, nella sua tesi di dottorato del 1953, presenta un'applicazione economica di alcune di queste soluzioni al problema della decisione in condizioni di incertezza⁴⁸⁹. L'esempio discusso è quello di un imprenditore che conosce solo la sua funzione di costo. Shubik costruisce una matrice in cui le righe rappresentano tre stati di natura (prezzo basso, medio e alto) e le colonne le possibili decisioni dell'imprenditore (livello di produzione alto, medio e basso); gli elementi della matrice indicano il profitto ottenuto per ogni combinazione di riga e colonna. Questo gioco viene risolto costruendo una distribuzione a priori sulle scelte della Natura attraverso un modello adattivo fondato, per esempio, sulla precedente evoluzione dei prezzi e massimizzando il profitto atteso.

L'ultimo settore della teoria della decisione che deve la propria fondazione matematica alla teoria dei giochi è la programmazione lineare. Dorfman, Samuelson e Solow, che pubblicano negli anni '50 un libro sulle relazioni tra la programmazione lineare e l'analisi economica, commentano in questo modo il rapporto che lega i due settori di analisi:

Both game theory and linear programming are applications of the same branch of mathematics - the analysis of linear inequalities - a branch which has many other applications as well, both in and out of economics. The connection is analogous with the connection between the growth of investments at compound interest and Malthusian population theory⁴⁹⁰.

La ricostruzione storica degli eventi che conducono alla nascita della programmazione lineare sembra contraddire almeno in parte questo giudizio⁴⁹¹. In un articolo, mai pubblicato, del novembre 1947 - "Discussion of a maximum problem" - John von Neumann dimostra per la prima volta che il problema analitico di massimizzare una funzione lineare a più variabili vincolata da un certo numero di disuguaglianze è equivalente al problema razionale algebrico di risolvere un sistema di disuguaglianze lineari⁴⁹². E' da questo lavoro che Dantzig⁴⁹³ prende spunto per dimostrare il teorema della dualità e gli altri teoremi di esistenza della programmazione lineare. Un procedimento matematico simile a questi ultimi era peraltro già stata impiegato da von Neumann nell'articolo del 1938 sulla crescita in equilibrio di un'economia competitiva.

La posizione di Dorfman, Samuelson e Solow è piuttosto giustificata dalla successiva evoluzione della programmazione lineare. Dopo il 1950,

questa disciplina si stacca totalmente dalla sua radice iniziale e questa distanza motiva anche il giudizio negativo - già riportato nel paragrafo 5.3 - degli stessi autori sulle potenzialità economiche della teoria dei giochi. I due approcci sono infatti sostanzialmente differenti. L'applicazione dei teoremi della programmazione lineare è possibile solo se esiste un controllo completo (diretto o statistico) su tutte le variabili da cui dipende il risultato del modello costruito. Ma se anche una sola variabile sfugge al controllo dell'economista, la diversa situazione di conoscenza, di 'rischio' o di 'incertezza', deve essere descritta attraverso altri sistemi teorici. La teoria dei giochi offre invece un apparato che è in grado di descrivere anche modelli in cui le condizioni di informazione vengono indebolite.

5.7 I giochi sperimentali e i 'business games'

Per concludere il quadro delle applicazioni economiche della teoria dei giochi è necessario accennare ad nuova forma di verifica empirica dei modelli astratti, che si affianca negli anni '50 all'econometria. Mentre quest'ultima viene elevata al rango di scienza dalla nascita dell'Econometric Society, i giochi sperimentali e i 'business games' devono la propria origine alla RAND Corporation. Nell'estate del 1952, questa associazione promuove a Santa Monica, in California, un seminario intitolato 'The design of experiments in decision processes', i cui atti vengono pubblicati nel 1954⁴⁹⁴. Tra i paper presentati in quella occasione, due rivestono particolare importanza per gli sviluppi successivi. Il primo è rappresentato dal tentativo di Estes di verificare sperimentalmente un modello di apprendimento stocastico ed il secondo da un esperimento di G.Kalisch, J.W. Milnor, J.Nash e E.D. Nering sulla teoria dei giochi a n persone.

Il paper di Estes è interessante perchè diventa oggetto di una discussione tra economisti e studiosi della teoria dei giochi, che conduce Herbert Simon a formulare la sua teoria della razionalità limitata. Ciò che Estes riesce a dimostrare attraverso il suo esperimento è che l'apprendimento è un processo di tipo stocastico che converge solitamente ad un'esatta predizione della distribuzione di probabilità associata al verificarsi di ogni evento. Il suo lavoro rappresenta quindi una conferma della definizione di razionalità offerta dalla teoria dei giochi. Herbert Simon torna sulla questione in un articolo pubblicato nel suo libro del 1957, *Models of Man*. Criticando i risultati dell'esperimento di Estes, Simon sostiene che non è lecito applicare né un modello di apprendimento convergente né le ipotesi di comportamento massimizzante adottate dalla teoria dei giochi. E' invece necessario distinguere tra razionalità soggettiva, quella del soggetto sottoposto all'esperimento, e razionalità oggettiva, quella dello sperimentatore. La prima si fonda su una 'percezione' del mondo esterno che non coincide con le caratteristiche con cui viene disegnato l'esperimento. Il processo di apprendimento ha perciò l'obiettivo di individuare quale tra i modelli del 'mondo percepito' da ogni soggetto sia il più appropriato alla decisione e non quello di stabilire un comportamento che permetta di massimizzare il risultato finale del gioco⁴⁹⁵.

Il secondo paper sperimentale presentato al convegno del 1952, quello di Kalisch, Milnor, Nash e Nering, si propone invece di verificare la validità empirica di alcuni concetti di soluzione proposti dalla teoria dei giochi⁴⁹⁶. Indipendentemente dai risultati raggiunti, che non

si traducono in conclusioni chiare per la difficoltà di determinare una tecnica sperimentale 'neutra'⁴⁹⁷, questo lavoro rappresenta un modello per tutti gli 'experimental games' che vengono formulati negli anni successivi. Da un punto di vista tecnico, l'articolo offre un primo insieme di strumenti tecnici per lo scienziato interessato alla verifica sperimentale delle proprie teorie. I soggetti sottoposti all'esperimento vengono prima istruiti sulle principali caratteristiche concettuali della teoria dei giochi e poi sottoposti all'esperimento con un limite di tempo determinato; i pagamenti del gioco sono rappresentati dall'attribuzione di 'fiches', che alla fine del gioco vengono convertite in moneta; la discussione dei risultati dell'esperimento tiene conto delle condizioni ambientali in cui esso si svolge⁴⁹⁸; un ruolo decisivo viene riconosciuto alle differenze di personalità dei soggetti sottoposti all'esperimento, che influenzano in modo determinante il risultato finale del gioco.

Negli anni successivi vengono fatti numerosi tentativi di migliorare l'apparato tecnico impiegato da Kalisch, Milnor, Nash e Nering. Molti dei contributi presentati si interessano al gioco del 'dilemma del prigioniero'⁴⁹⁹; Vinacke e Arkoff sottopongono invece a test la teoria delle coalizioni di von Neumann e Morgenstern⁵⁰⁰; Merrill M. Flood, nel 1955, e Frederick Mosteller e Philip Noguee, nel 1951, effettuano alcuni esperimenti sulla funzione di utilità cardinale di von Neumann e Morgenstern⁵⁰¹; Jeremy J. Stone si occupa del modello di contrattazione di Nash⁵⁰²; Thomas C. Schelling determina infine la sua teoria dei 'focal points' sulla base di alcune verifiche sperimentali⁵⁰³. La totalità di questi contributi non può però essere considerata parte nell'economia, in quanto essi si limitano a verificare la validità empirica dei principi astratti formulati dalla teoria dei giochi, senza affrontare direttamente la verifica di precise teorie economiche.

La fondazione di una vera e propria 'experimental economics' è perciò rinviata agli anni '60⁵⁰⁴. L'unico isolato tentativo di precorrere questi sviluppi viene effettuato nel 1948 da Alfred Chamberlin. L'esperimento costruito dal fondatore della teoria della concorrenza monopolistica ha però pochi punti di contatto con la teoria dei giochi. La procedura sperimentale adottata da Chamberlin può essere così descritta: (a) ogni compratore riceve una carta sulla quale è riportato il prezzo massimo al quale può comprare un'unità dell'unico bene scambiabile, (b) ogni venditore riceve una carta sulla quale è scritto un prezzo minimo di vendita, (c) tutti i soggetti circolano casualmente in una stanza, (d) appena un contratto viene concluso, le carte vengono consegnate all'arbitro dell'esperimento che scrive su una lavagna visibile a tutti il prezzo di accordo.

Il risultato a cui perviene Chamberlin è che nel gioco non prevalgono le condizioni di equilibrio competitivo e le fluttuazioni di prezzo rendono, nella maggior parte dei casi, il volume delle vendite superiore al valore di equilibrio prevedibile in base all'incrocio delle curve di domanda e di offerta

Secondo Vernon L. Smith, uno dei protagonisti, negli anni '60, della 'experimental economics', la procedura impiegata da Chamberlin può essere considerata primitiva. Essa corrisponde ad una:

random meetings economy: more-or-less simultaneous bilateral bargaining with no opportunity for the complete multilateral dissemination of information, and no opportunity to learn by repeated interaction through time⁵⁰⁵.

In effetti, nel contributo precursore di Chamberlin c'è una semplicità elementare delle regole dell'esperimento, manca qualsiasi formalizzazione del processo di contrattazione e inoltre non è presente alcun accorgimento che renda i giocatori più motivati rispetto al risultato economico dell'esperimento.

Ma il principale impulso all'idea di sottoporre ad esperimento modelli di competizione economica proviene nel 1957 dall'elaborazione del primo 'business game' da parte di un gruppo di economisti e di manager diretto da Richard Bellman⁵⁰⁶. Dopo questo primo contributo, i 'business games' diventano lo strumento maggiormente impiegato dalle grandi aziende statunitensi per reclutare i propri quadri dirigenziali.

Il gioco costruito nel 1957 simula un mercato oligopolistico composto da cinque imprese che competono in un'economia in crescita a tasso costante. Ogni giocatore riceve un insieme di informazioni sull'attività dell'impresa che deve dirigere e sulle condizioni di mercato nel periodo precedente; sulla base di questi dati, egli deve determinare un prezzo di vendita, l'ammontare della spesa in marketing e in Ricerca & Sviluppo, la quantità prodotta ed un programma di investimenti per il periodo successivo. Le regole del gioco permettono inoltre di acquistare ulteriori informazioni sulle caratteristiche del mercato.

Il gioco viene ripetuto per un numero fisso di periodi ed alla fine di ognuno di essi un computer mostra l'esito di tutte le decisioni prese dai cinque giocatori, calcolando le rispettive quote di mercato, i costi per unità di prodotto e l'andamento tendenziale della capacità produttiva nei periodi successivi.

L'utilità di questi tipi di modelli, che vengono ulteriormente perfezionati negli anni successivi⁵⁰⁷, va oltre il suo impiego immediato come strumento di selezione del personale. Come evidenziano gli stessi autori dell'articolo del 1957, i 'business games' consentono di approfondire lo studio delle situazioni di interazione strategica evidenziando, per esempio, quali ulteriori informazioni sul comportamento degli individui possono essere utili per la costruzione di modelli astratti. Essi costituiscono perciò un ulteriore contributo all'elaborazione di una teoria economica più rappresentativa del reale funzionamento dei mercati, obiettivo che caratterizza fino dalle sue origini il processo di introduzione della teoria dei giochi nell'economia, a cui questo studio è dedicato.

BIBLIOGRAFIA

- Afriat, Sidney N. 1989. "Von Neumann's Economic Model", in M. Dore-S. Chakravarty-R. Goodwin (editors), *John von Neumann and Modern Economics*, Clarendon Press, Oxford, pp.193-220.
- Alchian, Armen A. 1953. "The Meaning of Utility Measurement", *The American Economic Review*, Vol.43, n.1, March, pp.26-50.
- Allais, Maurice. 1953. "Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'ecole americaine", *Econometrica*, Vol.21, n.4, October, pp.503-546.
- Allen, R. G. D. 1932. "The Foundations of a Mathematical Theory of Exchange", *Economica*, Vol.12, n.36, May, pp.197-226.
- Andlinger, G. R. 1958. "Business Games-PLAY ONE!", *Harvard Business Review*, Vol.36, n.2, March-April, pp.115-125.
- Armstrong, W. E. 1939. "The Determinateness of the Utility Function", *The Economic Journal*, Vol.69, n.195, September, pp.453-467.
- Arrow, Kenneth J. 1951. "Alternative Approaches to the Theory of Choice in Risk-Taking Situations", *Econometrica*, Vol.19, n.4, October, pp.404-437.
- 1951a. "Mathematic Models in the Social Sciences", in D. Lerner-H. D. Lasswell (editors), *The Policy Sciences. Recent Developments in Scope and Method*, Stanford University Press, Stanford, pp.129-154.
- 1951b. *Social Choice and Individual Values*, John Wiley & Sons, New York.
- 1953. "Le role des valeurs boursières pour la repartition la meilleure des risques", *Econométrie, Colloques Internationaux du Centre national de la Recherche Scientifique*, Paris, Centre National de la Recherche Scientifique, Vol.XLII, pp.41-47.
- 1958. "Utilities, Attitudes, Choices: A Review Note", *Econometrica*, Vol.26, n.1, January, pp.1-23.
- 1987. "Arrow on Arrow: an Interview", in G. R. Feiwel (editor), *Arrow and the Foundations of Economic Policy*, New York University Press, New York, pp.637-657.
- 1987a. "Oral History I: An Interview", in G. R. Feiwel, (editor), *Arrow and the Ascent of Modern Economic Theory*, New York University Press, New York, pp.191-242.
- 1989. "Von Neumann and the Existence Theorem for General Equilibrium", in M. Dore-S. Chakravarty-R. Goodwin (editors), *John von Neumann and Modern Economics*, Clarendon Press, Oxford, pp.15-28.

- Arrow, Kenneth J. - E. W. Barankin - D. Blackwell. 1953. "Admissible Points of Convex Sets", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), Contributions to the Theory of Games. Volume II, Princeton University Press, Princeton, pp.87-91.
- Arrow, Kenneth J. - D. Blackwell - M. A. Girschick. 1949. "Bayes and Minimax Solutions of Sequential Decision Problems", *Econometrica*, Vol.17, n.3/4, July-October, pp.213-244.
- Arrow, Kenneth J. - Gérard Debreu. 1954. "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy", *Econometrica*, Vol.22, n.3, July, pp.265-291.
- Arrow, Kenneth J. - Seppo Honkapohja (editors). 1985. *Frontiers of Economics*, Basil Blackwell, Oxford.
- Arrow, Kenneth J. - Leonid Hurwicz. 1958. "On the Stability of the Competitive Equilibrium. I", *Econometrica*, Vol.26, n.4, October, pp.522-552.
- Arrow, Kenneth J. - Samuel Karlin - Herbert Scarf. 1958. *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*, Stanford University Press, Stanford.
- Arrow, Kenneth J. - Patrick Suppes (editors). 1960. *Mathematical Methods in the Social Sciences*, Stanford University Press, Stanford.
- Aubin, Jean-Pierre. 1982. *Mathematical Methods of Game and Economic Theory*, North Holland, Amsterdam.
- Aumann, Robert J. 1959. "Acceptable Points in General Cooperative n-Person Games", in A. W. Tucker-R. D. Luce (editors), Contributions to the Theory of Games. Volume IV, Princeton University Press, Princeton, pp.287-324.
- 1960. "Linearity of Unrestrictedly Transferable Utilities", *Naval Research Logistic Quarterly*, Vol.7, n.3, September, pp.281-284.
- 1961. "The Core of a Cooperative Game Without Side Payments", *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol.98, n.3, March, pp.539-552.
- 1967. "A Survey of Cooperative Games Without Side Payments", in M. Shubik (editor), *Essays in Mathematical Economics*. In Honor of Oskar Morgenstern, Princeton University Press, Princeton, pp.3-29.
- 1981. "Survey of Repeated Games", in R. J. Aumann et al., *Essays in Game Theory in Honor of Oskar Morgenstern*, Bibliographisches Institut, Mannheim, pp.11-42.
- 1985. "What is Game Theory Trying to Accomplish?", in K. J. Arrow-S. Honkapohja (editors), *Frontiers of Economics*, Basil Blackwell, Oxford, pp.27-76.

- 1987. "Game Theory", in J. Eatwell-M. Milgate-P. Newman (editors), *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, The Mac Millan Press, New York, pp.460-482.
- 1987a. "Arrow-the Breadth, Depth and Conscience of the Scholar: an Interview", in G. R. Feiwel (editor), *Arrow and the Foundations of the Theory of Economic Policy*, New York University Press, New York, pp.658-662.
- 1987b. "Economic Theory and Mathematical Method: An Interview", in G. R. Feiwel (editor), *Arrow and the Ascent of Modern Economic Theory*, New York University Press, New York, pp.306-316
- 1989. *Lectures on Game Theory*, Westview Press, Boulder.
- 1989a. "CORE as a Macrococosm of Game-Theoretic Research, 1967-1987", in B. Cornet-H. Tulkens (editors), *Contributions to Operations Research and Economics: The Twentieth Anniversary of CORE*, The MIT Press, Cambridge, pp.5-15.
- Aumann, Robert J. et al. 1981. *Essays in Game Theory in Honor of Oskar Morgenstern*, Bibliographisches Institut, Mannheim.
- Aumann, Robert J. - Michael Maschler. 1964. "The Bargaining Set for Cooperative Games", in M. Dresher-L. S. Shapley-A. W. Tucker, (editors), *Advances in Game Theory*, Princeton University Press, Princeton, pp.443-476.
- Aumann, Robert J. - Bezalel Peleg. 1960. "Von Neumann-Morgenstern Solutions to Cooperative Games Without Side Payments", *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol.66, n.3, May, pp.173-179.
- Axelrod, Robert. 1970. *Conflict of Interest. A Theory of Divergent Goals with Applications to Politics*, Markham Publishing Company, Chicago.
- Bacharach, Michael. 1976. *Economics and the Theory of Games*, Mac Millan Press, London.
- Backhouse, Roger. 1987. *A History of Modern Economic Analysis*, Basil Blackwell, Oxford.
- Bailey, Stephen K. et al. 1955. *Research Frontiers in Politics and Government*, The Brookings Institution, Washington.
- Bain, Joe S. 1948. "Output Quotas in Imperfect Cartels", *The Quarterly Journal of Economics*, Vol.62, n.4, August, pp.617-622.
- 1956. *Barriers to New Competition*, Harvard University Press, Cambridge.
- Baumol, William J. 1951. "The Neumann-Morgenstern Utility Index-An Ordinalist View", *The Journal of Political Economy*, Vol.59, n.1, February, pp.61-66.
- 1959. *Business Behavior, Value and Growth*, Mac Millan, London.

- Baumol, William J. - Stephen M. Goldfeld (editors). 1968. *Precursor in Mathematical Economics: An Anthology*, The London School of Economics and Political Science, London.
- Bellman, Richard. 1984. *Eye of the Hurricane*, World Scientific, Singapore.
- Bellman, Richard - Charles E. Clark - Donald G. Malcom - Clifford J. Craft - Franc M. Ricciardi. 1957. "On the Construction of a Multi-stage Multi-person Business Game", *Operations Research*, Vol.5, n.4, August, pp.469-503.
- Bennion, Edward G. 1956. "Capital Budgeting and Game Theory", *Harvard Business Review*, Vol.34, n.6, November-December, pp.115-123.
- Berge, Claude. 1953. "Sur une théorie ensembliste des jeux alternatifs", *Journal de mathématiques pures et appliquées*, Vol.32, pp.129-184.
- 1957. "Topological Games With Perfect Information", in M. Dresher-A. W. Tucker-P. Wolfe (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume III*, Princeton University Press, Princeton, pp.165-178.
- 1957a. *Théorie Générale des Jeux A n Personnes*, Gauthier-Villars, Paris.
- 1965. *Programming, games and Transportation Networks*, Methuen and Co., London.
- Bernard, Jessie. 1954. "The Theory of Games of Strategy as a Modern Sociology of Conflict", *The American Journal of Sociology*, Vol.59, n.5, March, pp.411-424.
- Bernoulli, Daniel. 1738. "Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis", in *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Tomus V, pp.175-192 (ediz. consultata: "Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk", *Econometrica*, Vol.22, n.1, January, 1954, pp.23-36).
- Bertolino, Alberto. 1980. "Il pensiero economico italiano dal risorgimento alla ricostruzione", in M. Finioia (a cura di), *Il pensiero economico italiano (1850-1950)*, Cappelli, Bologna, pp.31-50.
- Bertrand, J. 1883. "Théorie mathématique de la richesse sociale", *Journal des Savants*, Septembre, pp.499-508.
- Binmore, Ken. 1991. *DeBayesing Game Theory*, unpublished, Michigan, lecture for the International Conference on Game Theory, Florence, 25th June 1991.
- Binmore, Ken - Partha Dasgupta. 1986. "Introduction. Game Theory: A Survey", in K. Binmore-P. Dasgupta (editors), *Economic Organizations as Games*, Basil Blackwell, Oxford, pp.1-48.

- 1987. "Nash Bargaining Theory: An Introduction", in K. Binmore-P. Dasgupta (editors), *The Economics of Bargaining*, Basil Blackwell, Oxford, pp.1-25.
- Binmore, Ken - Partha Dasgupta (editors). 1986. *Economic Organizations as Games*, Basil Blackwell, Oxford.
- 1987. *The Economics of Bargaining*, Basil Blackwell, Oxford.
- Birch, B. J. 1955. "On Games With Almost Complete Information", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol.51, pp.275-287.
- Bishop, Robert L. 1963. "Game-Theoretic Analyses of Bargaining", *The Quarterly Journal of Economics*, Vol.78, pp.559-602 (ediz. consultata: in O. R. Young, editor, *Bargaining. Formal Theories of Negotiation*, University of Illinois Press Urbana, Illinois, 1975, pp.85-129).
- 1964. "A Zeuthen-Hicks Theory of Bargaining", *Econometrica*, Vol.32, pp.410-417 (ediz. consultata: in O. R. Young, editor, *Bargaining. Formal Theories of Negotiation*, University of Illinois Press Urbana, Illinois, 1975, pp.183-190).
- Black, Duncan. 1948. "On The Rationale of Group-Decision Making", *The Journal of Political Economy*, Vol.56, n.1, February, pp.23-34.
- Blackwell, David. 1954. "Game Theory", in J. Mc Closkey-F. N. Trefethen (editors), *Operations Research for Management*, The John Hopkins Press, Baltimore, pp.238-253.
- 1956. "An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoffs", *Pacific Journal of Mathematics*, Vol.6, n.1, Spring, pp.1-8.
- Blackwell, David - M. A. Girschick. 1954. *Theory of Games and Statistical Decisions*, John Wiley & Sons, New York (ediz. consultata: Dover Publications, New York, 1979).
- Blaug, Mark. 1968. *Economic Theory in Retrospect*, Richard D. Irwin, Homewood.
- 1976. "Kuhn versus Lakatos or Paradigm versus Research Programmes in the History of Economics", in S. J. Latsis (editor), *Method and Appraisal in Economics*, Cambridge University Press, Cambridge, pp.149-180.
- 1980. *The Methodology of Economics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- 1985. *Great Economists since Keynes*, Wheatsheaf Books, Brighton.
- 1986. *Economic History and the History of Economics*, New York University Press, New York.

- Bohm-Bawerk, Eugene von. 1889. *Positive Theorie des Kapitaales*, Gustav Fisher, Jena (ediz. consultata: *Teoria positiva del capitale e excursus*, UTET, Torino, 1957).
- Bohnenblust, H. F. - S. Karlin. 1950. "On a Theorem of Ville", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games*. Volume I, Princeton University Press, Princeton, pp.155-160.
- Bohnenblust, H. F. - S. Karlin - L. S. Shapley. 1950. "Solutions of Discrete Two-person Games", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games*. Volume I, Princeton University Press, Princeton, pp.51-72.
- 1950. "Games with Continuous, Convex Pay-off", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games*. Volume I, Princeton University Press, Princeton, pp.181-192.
- Borch, Karl. 1962. "Discussion Following Professor Morgenstern's Paper", in *Princeton University Conference, The Recent Advances in Game Theory*, privately printed, Princeton, papers delivered at a Meeting of the Princeton University Conference, October 4-6, 1961, pp.13-14.
- Borel, Émile. 1909. *Éléments de la théorie des Probabilités*, Libraire Scientifique A. Hermann & Fils, Paris.
- 1921. "La Théorie du jeu et les equations intégrales a noyau symétrique", *Comptes Rendus Hebdomadaires Des Séances de l'Académie des Sci.*, Vol.173, n.25, 19 Décembre, pp.1304-1308 (traduzione inglese: "The Theory of Play and Integral Equations with Skew Symmetric Kernels", *Econometrica*, Vol.21, n.1, January 1953, pp.97-100).
- 1924. "Sur les jeux où interviennent l'hasard et l'habileté des joueurs", in *Théorie des Probabilités*, Librairie Scientifique J. Hermann, Paris, pp.204-224 (traduzione inglese: "On Games That Involve Chance and the Skill of the Players", *Econometrica*, Vol.21, n.1, January 1953, pp.101-115).
- 1926. "Un théorème sur les systèmes de formes linéaires à déterminant symétrique gauche", *Comptes Rendus Hebdomadaires Des Séances de l'Académie des Sci.*, Vol.183, n.21, 22 Novembre, pp.925-927.
- 1927. "Sur les systèmes de formes linéaires à déterminant symétrique gauche et la théorie générale du jeu", *Comptes Rendus Hebdomadaires Des Séances de l'Académie des Sci.*, Vol.184, n. 24, pp.1167 (traduzione inglese: "On Systems of Linear Forms of Skew Symmetric Determinant and the General Theory of Play", *Econometrica*, Vol.21, n.1, January 1953, pp.116-117).
- 1938. "Jeux où la psychologie joue un role fondamental", in *Traité du calcul des probabilités et de ses applications, Applications des jeux de hasard*, Gauthier-Villars, Paris, Vol.IV, Fasc.2, pp.71-87.

- Bott, Raoul. 1953. "Symmetric Solutions to Majority Games", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), Contributions to the Theory of Games. Volume II, Princeton University Press, Princeton, pp.319-324.
- Boulding, Kenneth E. 1948. "Samuelson's Foundations: The Role of Mathematics in Economics", The Journal of Political Economy, Vol.56, n.3, June, pp.187-199.
- Bowley, A. L. 1924. The Mathematical Groundwork of Economics, Clarendon Press, Oxford.
- 1928. "Bilateral Monopoly", The Economic Journal, Vol.38, n.152, December, pp.651-659.
- Braithwaite, R. B. 1955. Theory of Games As a Tool for the Moral Philosopher, Cambridge University Press, Cambridge (ediz. consultata: Cambridge University Press, Cambridge, 1963).
- Brambilla, Francesco. 1953. "Caso, incertezza, organizzazione. I", Tecnica ed organizzazione, Vol.4, n.8, marzo-aprile, pp.3-7.
- 1953a. "Caso, incertezza, organizzazione. II", Tecnica ed organizzazione, Vol.4, n.9, maggio-giugno, pp.10-15.
- 1953b. " Bibliografia intorno alla teoria dei giochi", Tecnica ed organizzazione, Vol.4, n.10, luglio-agosto, pp.12-16.
- Brems, Hans. 1951. Product Equilibrium under Monopolistic Competition, Harvard University Press, Cambridge.
- 1986. Pioneering Economic Theory, 1630-1980. A Mathematical Restatement, The John Hopkins University Press, Baltimore and London.
- Bronfenbrenner, Martin. 1948. "Discussion to 'Oligopoly, Monopolistic Competition, and the Theory of Games'", The American Economic Review, Vol.38, n.2, May, pp.21-26.
- 1971. "The 'Structure of Revolutions' in Economic Thought", History of Political Economy, Vol.3, n.1, Spring, pp.136-151.
- Brown, G. W. - J. von Neumann. 1950. "Solutions of Games by Differential Equations", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), Contributions to the Theory of Games. Volume I, Princeton University Press, Princeton, pp.73-80.
- Burger, Ewald. 1963. Introduction to the Theory of Games, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Caldwell, Bruce J. (editor) 1984. Appraisal and Criticism in Economics. A Book of Readings, Allen & Unwin, Boston.
- Campbell, Richmond - Lanning Sowden. 1985. Paradoxes of Rationality and Cooperation. Prisoner's Dilemma and Newcomb's Problem, The University of British Columbia Press, Vancouver.

- Case, James H. 1979. *Economics and the Competitive Process*, New York University Press, New York.
- Chacko, K. George. 1950. "Economic Behaviour - A New Theory", *The Indian Journal of Economics*, Vol.30, n.119, April, pp.349-365.
- 1951. "The Concept of Utility: a Different Approach to Fundamentals", *The Indian Journal of Economics*, Vol.32, n.125, October, pp.99-113.
- 1956. "Certain Game Situations in Regional Economic Development", *The Indian Journal of Economics*, Vol.37, n.145, October, pp.167-175.
- Chakravarty, Sukhamoy. 1989. "John von Neumann's Model of an Expanding Economy: an Essay in Interpretation", in M. Dore-S. Chakravarty-R. Goodwin (editors), *John von Neumann and Modern Economics*, Clarendon Press, Oxford, pp.69-81.
- Chamberlin, Edward H. 1933. *The Theory of Monopolistic Competition. A Re-orientation of the Theory of Value*, Oxford University Press, London (ediz. consultata: Oxford University Press, London, 1949-VII).
- 1948. "An Experimental Imperfect Market", *The Journal of Political Economy*, Vol.56, n.2, April, pp.95-108.
- Chernoff, Herman. 1949. *Remarks on a Rational Selection of a Decision Function*, Cowles Commission Discussion paper, Statistics, n.326.
- Coase, R. H. 1953. "The Problem of Duopoly Reconsidered", *The Review of Economic Studies*, Vol.2, n.2, February, pp.137-143.
- Coats, A. W. 1969. "Research Priorities in the History of Economics", *History of Political Economy*, Vol.1, n.1, Spring, pp.9-18.
- 1976. "Economics and Psychology: The Death and Resurrection of a Research Programme", in S. J. Latsis (editor), *Method and Appraisal in Economics*, Cambridge University Press, Cambridge, pp.43-65
- Copeland, Artur H. 1945. "Book Reviews. Theory of Games and Economic Behavior", *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol.51, n.7, July, pp.498-504.
- Cornet, Bernard - Henry Tulkens (editors). 1989. *Contributions to Operations Research and Economics: The Twentieth Anniversary of CORE*, The MIT Press, Cambridge.
- Costa, Giacomo - Pier Angelo Mori. 1992. "Teoria dei giochi e applicazioni economiche: concetti di base e sviluppi recenti", *Economia Politica*, Vol.IX, n.3, dicembre, pp.471-551.
- Cournot, Augustin. 1838. *Reserches sur le principes mathématiques de la Théorie des richesses*, Paris (ediz. consultata: *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, Hafner Publishing Company, London, 1960).

- Cramér, Harald. 1954. *The Elements of Probability Theory and Some of Its Applications*, John Wiley & Sons, New York.
- Craver, Earlene. 1986. "The Emigration of the Austrian Economists", *History of Political Economy*, Vol.18, n.1, Spring, pp.1-32.
- Cross, John G. 1965. "A Theory of the Bargaining Process", *The American Economic Review*, Vol.55, pp.67-94 (ediz. consultata: in O. R. Young, editor, *Bargaining. Formal Theories of Negotiation*, University of Illinois Press Urbana, Illinois, 1975, pp.191-218).
- Cross, R. 1982. "The Duhem-Quine Thesis, Lakatos and the Appraisal of Theories in Macroeconomics", *Economic Journal*, Vol.92, n.6, June, pp.320-340.
- Dalkey, Norman. 1953. "Equivalence of Information Patterns and Essentially Determinate Games", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume II*, Princeton University Press, Princeton, pp.217-244.
- Dantzig, George B. 1951. "Maximization of a Linear Function of Variables subject to Linear Inequalities", in T. C. Koopmans (editor), *Activity Analysis of Production and Allocation*, John Wiley & Sons, New York, pp.339-347
- 1951a. "Application of the Simplex Method to a Transportation Problem", in T. C. Koopmans (editor), *Activity Analysis of Production and Allocation*, John Wiley & Sons, New York, pp.359-373.
- 1951b. "A Proof of the Equivalence of the Programming Problem and the Game Problem", in T. C. Koopmans (editor), *Activity Analysis of Production and Allocation*, John Wiley & Sons, New York, pp.330-335.
- 1956. "Constructive Proof of the MinMax Theorem", *Pacific Journal of Mathematics*, n.6, pp.25-33.
- Darnell, Adrian C. 1990. "The Life and Economic Thought of Harold Hotelling", in A. C. Darnell (editor), *The Collected Economics Articles of Harold Hotelling*, Springer-Verlag, New York, pp.1-28.
- Darnell, Adrian C. (editor). 1990. *The Collected Economics Articles of Harold Hotelling*, Springer-Verlag, New York.
- d'Aspremont, Claude. 1989. "Comments: What Is Bob Aumann Trying to Accomplish?" in B. Cornet-H. Tulkens (editors), *Contributions to Operations Research and Economics: The Twentieth Anniversary of CORE*, The MIT Press, Cambridge, pp.16-17.
- d'Aspremont, Claude - J. Jaskold Gabszewicz - J. F. Thisse. 1979. "On Hotelling's 'Stability in Competition'", *Econometrica*, Vol.47, n.5, September, pp.1145-1148.
- Daughety, Andrew F. 1988. "Introduction, Purpose and Overview", in A. F. Daughety (editor), *Cournot Oligopoly. Characterization and Application*, Cambridge University Press, Cambridge, pp.3-44.

- Daughety, Andrew F. (editor). 1988. Cournot Oligopoly. Characterization and Application, Cambridge University Press, Cambridge.
- David, F. N. 1962. Games, Gods and Gambling, Hafner Publishing Company, New York.
- Davidson, Donald - Patrick Suppes - Sidney Siegel. 1957. Decision Making. An Experimental Approach, Stanford University Press, Stanford.
- Davis, Morton D. 1970. Game Theory, Basic Books, New York.
- Davis, Robert L. 1954. "Introduction to 'Decision Processes'", in R. M. Thrall-C. H. Coombs-R. L. Davis (editors), Decision Processes, John Wiley & Sons, New York, pp.1-18.
- Dean, Robert D. - William H. Lehay - David L. Mc Kee (editors). 1970. Spatial Economic Theory, The Free Press, New York.
- Debreu, Gerard. 1952. "A Social Equilibrium Existence Theorem", Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol.38, pp.886-893 (ediz. consultata: in G. Debreu, Mathematical Economics: Twenty Papers of Gerard Debreu, Cambridge University Press, Cambridge, 1983, pp.50-58)
- 1954. "Representation of a Preference Ordering by a Numerical Utility", in R. M. Thrall-C. H. Coombs-R. L. Davis (editors), Decision Processes, John Wiley & Sons, New York, pp.159-166.
- 1959. Theory of Value. An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium, John Wiley & Sons, New York.
- 1983. Mathematical Economics: Twenty Papers of Gerard Debreu, Cambridge University Press, Cambridge.
- 1987. "Oral History II: An Interview", in G. R. Feiwel (editor), Arrow and the Ascent of Modern Economic Theory, New York University Press, New York, pp.243-257.
- Debreu, Gérard - H. Scarf. 1963. "A Limit Theorem on the Core of an Economy", International Economic Review, n.4, pp.235-246 (ediz. consultata: in G. Debreu, Mathematical Economics: Twenty Papers of Gerard Debreu, Cambridge University Press, Cambridge, 1983, pp.151-162).
- de Finetti, Bruno. 1952. "Sulla preferibilità", Giornale degli Economisti e Annali di Economia, Vol.11, n.11-12, Novembre-Dicembre, pp.685-709.
- 1952a. "Il rischio e le decisioni economiche", Rivista bancaria, n.7-8, luglio-settembre, pp.34-46.
- 1953. Media di decisioni e media di opinioni, Inst. Int. Statistique, Roma.
- 1955. "La probabilità e le scienze sociali", L'industria, n.4, pp.467-495.

- Del Vecchio, Gustavo (a cura di), Nuova Collana di Economisti Stranieri e Italiani. Volume Quarto. Economia Pura, UTET, Torino, 1937.
- Demaria, Giovanni. 1947. "Su una nuova logica economica", *Giornale degli Economisti e Annali di Economia*, Vol.4, n.11-12, Novembre-Dicembre, pp.661-671.
- 1954. "Prime applicazioni economiche della teoria dei giochi", *Tecnica ed organizzazione*, Vol.5, pp.4-15.
- De Possel, René. 1936. "Sur la Théorie mathématique des jeux des hasard et de réflexion", *Conférence du Centre Universitaire Méditerranéen, Actualités Sc. et Ind.*, n.436, Herman, Paris.
- Deutsch, Karl W. 1954. "Game Theory and Politics: Some Problems of Application", *The Canadian Journal of Economics and Political Science*, Vol.20, n.1, February, pp.76-82.
- Deutsch, Morton. 1958. "Trust and Suspicion", *Journal of Conflict Resolution*, n.2, pp.265-279.
- 1962. "Some Social Psychological Assumptions of Game Theory", in *Princeton University Conference, The Recent Advances in Game Theory*, privately printed, Princeton, papers delivered at a Meeting of the Princeton University Conference, October 4-6, 1961, pp.57-59.
- Dimand, Robert W. - Mary Ann Dimand. 1990. *The Early History of the Theory of Games of Strategy from Waldegrave to Borel*, paper presented at the Duke University Conference on the history of game theory, unpublished, Ontario.
- Dines, Lloyd L. 1947. "On a Theorem of von Neumann", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, Vol.33, n.11, November, pp.329-331.
- Donzelli, Franco. 1986. *Il concetto di equilibrio nella teoria economica neoclassica*, La Nuova Italia Scientifica, Roma.
- 1988. "Introduzione", in F. A. von Hayek, *Conoscenza, mercato e pianificazione*, Il Mulino, Bologna, 1988, pp.9-91.
- Dore, Mohammed. 1989. "The Legacy of John von Neumann", in M. Dore-S. Chakravarty-R. Goodwin (editors), *John von Neumann and Modern Economics*, Clarendon Press, Oxford, pp.82-99.
- 1989a. "Game Theoretic Growth: a Numerical Illustration", in M. Dore-S. Chakravarty-R. Goodwin (editors), *John von Neumann and Modern Economics*, Clarendon Press, Oxford, pp.151-161.
- Dore, Mohammed - Sukhamoy Chakravarty - Richard Goodwin (editors). 1989. *John von Neumann and Modern Economics*, Clarendon Press, Oxford.
- Dorfman, Robert - Paul A. Samuelson - Robert M. Solow. 1958. *Linear Programming and Economic Analysis*, Mc Graw-Hill, New York (ediz. consultata: Dover Publications, New York, 1987).

- Downs, Anthony. 1957. *An Economic Theory of Democracy*, Harper & Row, New York.
- Dresher, Melvin. 1950. "Methods of Solution in Game Theory", *Econometrica*, Vol.18, n.4, April, pp.179-181.
- Dresher, Melvin - Samuel Karlin. 1953. "Solutions of Convex Games as Fixed-points", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume II*, Princeton University Press, Princeton, pp.75-86.
- Dresher, Melvin - Samuel Karlin - Lloyd S. Shapley. 1950. "Polynomial Games", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume I*, Princeton University Press, Princeton, pp.181-192.
- Dresher, Melvin - Lloyd S. Shapley. 1949. *Summary of Rand Research in the Mathematical Theory of Games*, Rand report D-558, 13 luglio, dattiloscritto, Santa Monica.
- Dresher, Melvin - Lloyd S. Shapley - Albert W. Tucker (editors). 1964. *Advances in Game Theory*, Princeton University Press, Princeton.
- Dresher, Melvin - Albert W. Tucker - Philip Wolfe (editors). 1957. *Contributions to the Theory of Games. Volume III*, Princeton University Press, Princeton.
- Dubins, L. E. 1957. "A Discrete Evasion Game", in M. Dresher-A. W. Tucker-P. Wolfe (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume III*, Princeton University Press, Princeton, pp.231-256.
- Easton, David. 1953. *The Political System. An Inquiry into the State of Political Science*, Alfred A. Knopf, New York.
- Eatwell, John - Murray Milgate - Peter Newman (editors). 1987. *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, The Mac Millan Press, New York.
- 1989. *The New Palgrave Game Theory*, W. W. Norton, New York.
- Econometric Society, The. 1949. "Report of the Madison meeting, September 7-10, 1948", *Econometrica*, Vol.17, n.1, January, pp.63-78.
- 1950. "The Report of the New York Meeting, December 27-30, 1949", *Econometrica*, Vol.18, n.4, April, pp.264-309.
- 1951. "The Report of the Harvard Meeting, August 31-September 5, 1950", *Econometrica*, Vol.18, n.1, January, pp.55-75.
- 1952. "The Report of the Minneapolis Meeting, September 4-7, 1951", *Econometrica*, Vol.20, n.1, January, pp.88-103.
- 1953. "The Report of the East Lansing Meeting, September 2-5, 1952", *Econometrica*, Vol.21, n.2, April, pp.336-351.
- 1953a. "The Report of the Chicago Meeting, December 27-29, 1952", *Econometrica*, Vol.21, n.3, July, pp.463-490.

- 1954. "The Report of the Washington Meeting, December 27-30, 1953", *Econometrica*, Vol.22, n.4, October, pp.513-530.
- 1959. "The Report of the Cambridge Meeting, August 26-28, 1958", *Econometrica*, Vol.27, n.2, April, pp.268-288.
- 1959a. "The Report of the Chicago Meeting, December 27-29, 1958", *Econometrica*, Vol.27, n.2, April, pp.288-315.
- Edgeworth, Francisco Y. 1881. *Mathematical Psychics*, Kegan, London (ediz. consultate: "Excerpts from Mathematical Psychics", in W. J. Baumol-S. M. Goldfeld (editors), *Precursor in Mathematical Economics: An Anthology*, The London School of Economics and Political Science, London, 1968, pp.192-200; "Psichica Matematica. Saggio sull'applicazione delle matematiche alle scienze morali", in G. Del Vecchio (a cura di), *Nuova Collana di Economisti Stranieri e Italiani. Volume Quarto. Economia Pura*, UTET, Torino, 1937, pp.191-327).
- 1897. "La teoria pura del monopolio" *Giornale degli Economisti*, pp.13-31; 307-320 [traduzione dall'originale inglese, mai pubblicato e andato disperso; le successive edizioni inglesi sono tradotte dall'articolo in italiano].
- 1925. *Papers Relating to Political Economy*, MacMillan and Co., London.
- Ellsberg, Daniel. 1956. "Theory of the Reluctant Duelist", *The American Economic Review*, Vol.XLVI, pp.909-923 (ediz. consultata: in O. R. Young, editor, *Bargaining. Formal Theories of Negotiation*, University of Illinois Press, Urbana, 1975, pp.38-52).
- 1959. "Rejoinder to 'Recurrent Objections to the Minimax Strategy'", *The Review of Economics and Statistics*, Vol.41, n.1, February, pp.42-43.
- 1963. "Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms", *Quarterly Journal of Economics*, Vol.75, n.10, November, pp.643-69.
- Epstein, Richard A. 1967. *The Theory of Gambling and Statistical Logic*, Academic Press, New York.
- Everett, H. 1957. "Recursive Games", in M. Dresher-A. W. Tucker-P. Wolfe (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume III*, Princeton University Press, Princeton, pp.47-78.
- Fan, Ky. 1952. "Fixed Points and minimax theorems in locally convex topological linear spaces", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol.38, n.2, pp.121-125.
- 1953. "Minimax Theorems", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, Vol.39, n.1, January, pp.42-47.
- Faxen, Karl-Olaf. 1949. "Spelteori, Förväntnings-analys och handelsatval", *Soertryk af Nationalokonomisk Tidsskrift*, Vol.12, n.4, pp.251-264.

- Feiwel, George R. 1987. "The Many Dimensions of Kenneth J. Arrow", in G. R. Feiwel (editor), *Arrow and the Foundations of the Theory of Economic Policy*, New York University Press, New York, pp.1-115
- 1987a. "The Potentials and Limits of Economic Analysis: The Contributions of Kenneth J. Arrow", in G. R. Feiwel (editor), *Arrow and the Ascent of Modern Economic Theory*, New York University Press, New York, pp.1-187.
- Feiwel, George R. (editor). 1987. *Arrow and the Ascent of Modern Economic Theory*, New York University Press, New York.
- 1987a. *Arrow and the Foundations of the Theory of Economic Policy*, New York University Press, New York.
- 1989. *The Economics of Imperfect Competition and Employment. Joan Robinson and Beyond*, New York University Press, New York.
- 1989a. *Joan Robinson and Modern Economic Theory*, New York University Press, New York.
- Fellner, William. 1949. *Competition Among the Few. Oligopoly and Similar Market Structures*, Alfred A. Knopf, New York.
- Finoia, Massimo (a cura di). 1980. *Il pensiero economico italiano (1850-1950)*, Cappelli, Bologna.
- Fisher, R. A. 1934. "Randomisation, and an Old Enigma of Card Play", *The Mathematical Gazette*, Vol.18, n.231, December, pp.294-297.
- Fisher, Robert M. 1986. *The Logic of Economic Discovery. Neoclassical Economics and the Marginal Revolution*, New York University Press, New York.
- Flood, Merrill M. 1954. "On Game-Learning Theory and Some Decision-Making Experiments", in R. M. Thrall-C. H. Coombs-R. L. Davis (editors), *Decision Processes*, John Wiley & Sons, New York, pp.139-158.
- 1955. "A Group Preference Experiment", in *Mathematical Models of Human Behavior*, Dunlap Associates, Stanford, pp.130-148.
- 1958. "Some Experimental Games", *Management Science*, Vol.5, n.1, October, pp.5-26.
- Forman, Paul. 1987. "Behind Quantum Electronics: National Security as a Basis for Physical Research in the U.S.", *Historical Studies in the Physical Sciences*, Vol.18, pp.149-229.
- Fréchet, Maurice. 1953. "Emile Borel, Initiator of the Theory of Psychological Games and its Application", *Econometrica*, Vol.21, n.1, January, pp.95-96.
- 1953a. "Commentary on the Three Notes of Emile Borel", *Econometrica*, Vol.21, n.1, January, pp.118-124.

- Friedman, James W. 1977. *Oligopoly and the Theory of Games*, North Holland, Amsterdam.
- 1986. *Game Theory with Applications to Economics*, Oxford University Press, New York.
- Friedman, Milton - Leonard J. Savage. 1948. "The Utility Analysis of Choices Involving Risk", *The Journal of Political Economy*, Vol.56, n.4, August, pp.279-304.
- Frisch, Ragnar. 1933. "Monopole-Polypole-La Notion de Force dans l'Economie", *Nationalokonomisk Tidsskrift*, pp.241-259 (ediz. consultata: in *International Economic Papers*, n.1, 1951, pp.23-36).
- Fudenberg, Drew - Jean Tirole. 1991. *Game Theory*, The Mit Press, Cambridge.
- Fulkerson, D. R. - S. M. Johnson. 1957. "A Tactical An Game", *Operations Research*, Vol.5, n.5, October, pp.705-712.
- Fulton, G. 1984. "Research Programmes in Economics", *History of Political Economy*, Vol.16, n.2, February, pp.187-206.
- Gale, David. 1951. "Convex Polyhedral Cones and Linear Inequalities" in T. C. Koopmans (editor), *Activity Analysis of Production and Allocation*, John Wiley & Sons, New York, pp.287-297.
- 1953. "A Theory of N-Person Games with Perfect Information", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, Vol.39, n.6, June, pp.496-501.
- 1957. "Information in Games With Finite Resources", in M. Dresher-A. W. Tucker-P. Wolfe (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume III*, Princeton University Press, Princeton, pp.141-145.
- Gale, David - H. W. Kuhn - Albert W. Tucker. 1950. "Reductions of Game Matrices", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume I*, Princeton University Press, Princeton, pp.89-96.
- 1950a. "Solutions of Games by Differential Equations", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume I*, Princeton University Press, Princeton, pp.73-80.
- 1951. "Linear Programming and the Theory of Games", in T. C. Koopmans (editor), *Activity Analysis of Production and Allocation*, John Wiley & Sons, New York, pp.317-329.
- Gale, David - S. Sherman. 1950. "Solutions of Finite Two-Person Games", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume I*, Princeton University Press, Princeton, pp.37-50.
- Gale, David - Lloyd S. Shapley. 1962. "College Admissions and the Stability of Marriage", *The American Mathematical Monthly*, Vol.69, n.1, January, pp.9-14.

- Gale, David - F. M. Stewart. 1953. "Infinite Games with Perfect Information", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), Contributions to the Theory of Games. Volume II, Princeton University Press, Princeton, pp.245-266.
- Gillette, Dean. 1957. "Stochastic Games With Zero Stop Probabilities", in M. Dresher-A. W. Tucker-P. Wolfe (editors), Contributions to the Theory of Games. Volume III, Princeton University Press, Princeton, pp.179-188.
- Gillies, D. B. 1953. "Discriminatory Solutions to Majority Games", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), Contributions to the Theory of Games. Volume II, Princeton University Press, Princeton, pp.325-342.
- 1959. "Solutions to General Non-Zero-Sum Game", in A. W. Tucker-R. D. Luce (editors), Contributions to the Theory of Games. Volume IV, Princeton University Press, Princeton, pp.47-86.
- Gillies, D. B. - J. P. Mayberry - John von Neumann. 1953. "Two Variants of Poker", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), Contributions to the Theory of Games. Volume II, Princeton University Press, Princeton, pp.13-50.
- Glicksberg, I. L. 1952. "A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem, with Applications to Nash Equilibrium Points", Proceedings of the American Mathematical Society, Vol.3, n.1, February, pp.170-174.
- Glicksberg, I. L. - O. Gross. 1953. "Notes on Games over the Square", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), Contributions to the Theory of Games. Volume II, Princeton University Press, Princeton, pp.173-182.
- Gödel, Kurt. 1931. "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I", Mh. Math. Phys., Vol.38, pp.173-198 (ediz. consultata: "Sulle proposizioni formalmente indecidibili dei 'Principia mathematica' e di sistemi affini", in appendice a E. Agazzi, Introduzione ai problemi dell'assiomatica, Vita e Pensiero, Milano, 1962).
- Gordon, Donald F. 1965. "The Role of the History of Economic Thought in the Understanding of Modern Economic Theory", The American Economic Review, Vol.55, n.2, May, Papers and Proceedings of the Seventy-seventh Annual Meeting of the American Economic Association, Chicago, Illinois, December 28-30, pp.119-127.
- Gravelle, Hugh - Ray Rees. 1981. Microeconomics, Longman Group (ediz. consultata: Microeconomia. Teoria. Strumenti. Scelte individuali e sociali, Ulrico Hoepli, Milano, 1988).
- Grillo, Michele - Francesco Silva. 1989. Impresa, concorrenza e organizzazione. Lezioni di economia e politica industriale, La Nuova Italia Scientifica, Roma.

- Gross, O. 1957. "A Rational Game on The Square", in M. Dresher-A. W. Tucker-P. Wolfe (editors), Contributions to the Theory of Games. Volume III, Princeton University Press, Princeton, pp.307-312.
- Grubel, H. G. - L. A. Boland. 1986. "On The Efficient Use of Mathematics in Economics: Some Theory, Facts and Results of an Opinion Survey", *Kyklos*, n.39, pp.419-442.
- Guilbaud, Georges Th. 1951. "The Theory of Games", *International Economic Papers*, Vol.1, pp.37-65.
- 1954. "La Théorie des jeux", *Revue d'Économie Politique*, Vol.65, pp.153-188.
- 1960. "Faut-il Jouer au Plus fin? (Notes sur l'histoire de la théorie des jeux)", *La Décision*, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 25-30 Mai, pp.171-182.
- Gumbel, E. J. 1945. "Review. Neumann, John von, and Oskar Morgenstern 'Theory of Games and Economic Behaviour'", *The Annals of the American Academy of Political and Social Sci.*, Vol.239, May, pp.209-210.
- Gurk, H. M. - J. R. Isbell. 1959. "Simple Solutions", in A. W. Tucker-R. D. Luce (editors), Contributions to the Theory of Games. Volume IV, Princeton University Press, Princeton, pp.247-266.
- Hale, J. K. - H. H. Wicke. 1957. "An Application of Game Theory to Special Weapons Evaluation", *Naval Research Logistic Quarterly*, Vol.4, n.4, December, pp.120-135.

- Hammond, Peter J. 1987. "Social Choice: the Science of the Impossible?", in G. R. Feiwel (editor), *Arrow and the Foundations of the Theory of Economic Policy*, New York University Press, New York, pp.116-131.
- 1991. *Harsanyi's Utilitarian Theorem: A Simpler Proof and Some Ethical Connotations*, EUI Working Paper ECO 91/32, Firenze.
- Hannan, James. 1957. "Approximation to Bayes Risk in Repeated Play", in M. Dresher-A. W. Tucker-P. Wolfe (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume III*, Princeton University Press, Princeton, pp.97-140.
- Harsanyi, John C. 1953. "Cardinal Utility in Welfare Economics and in the Theory of Risk-Taking", *The Journal of Political Economy*, Vol.61, n.3, October, pp.434-435.
- 1955. "Cardinal Welfare, Individualistic Ethics, and Interpersonal Comparisons of Utility", *The Journal of Political Economy*, Vol.63, n.4, August, pp.309-321.
- 1956. "Approaches to the Bargaining Problem Before and After the Theory of Games: A Critical Discussion of Zeuthen's, Hicks, and Nash's Theories", *Econometrica*, n.2, pp.144-157 (ediz. consultata: in J. C. Harsanyi, *Papers in Game Theory*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1982, pp.3-19).
- 1958. "Notes on the Bargaining Problem", *Southern Economic Journal*, Vol.XXIII, pp.471-476 (ediz. consultata: in O. R. Young, editor, *Bargaining. Formal Theories of Negotiation*, University of Illinois Press, Urbana, pp.288-293).
- 1959. "A Bargaining Model for the Cooperative n-Person Game", in A. W. Tucker-R. D. Luce (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume IV*, Princeton University Press, Princeton, pp.325-356.
- 1961. "On the Rationality Postulates Underlying the Theory of Cooperative Games", *Journal of Conflict Resolution*, n.5, pp.179-196 (ediz. consultata: in J. C. Harsanyi, *Papers in Game Theory*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1982, pp.20-43).
- 1962. "Measurement of Social Power, Opportunity Costs, and the Theory of Two-Person Bargaining Games", *Behavioral Science*, Vol.7, n.1, January, pp.67-80.
- 1962a. "Measurement of Social Power in n-Person Reciprocal Power Situations", *Behavioral Science*, Vol.7, n.1, January, pp.81-91.
- 1965. "Bargaining and Conflict Situations in the Light of a New Approach to Game Theory", *The American Economic Review*, Vol.55, pp.447-457 (ediz. consultata: in O. R. Young, editor, *Bargaining. Formal Theories of Negotiation*, University of Illinois Press Urbana, Illinois, 1975, pp.74-84).

- _____ 1967. "Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players", *Management Science*, n. 14, pp.159-182; 320-334; 486-502.
- _____ 1982. *Papers in Game Theory*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- _____ 1989. "Bargaining", in J. Eatwell-M. Milgate-P. Newman (editors), *The New Palgrave Game Theory*, W. W. Norton, New York, pp.54-67.
- _____ 1991. Normative Validity and Meaning of von Neumann-Morgenstern Utilities, unpublished, Berkeley, paper presented to the International Conference on Game Theory, Florence, June, 25-27, 1991.
- Hart, Sergiu. 1989. "Shapley Value", in J. Eatwell-M. Milgate-P. Newman (editors), *The New Palgrave Game Theory*, W. W. Norton, New York, pp.210-215.
- Hausner, Melvin. 1954. "Multidimensional Utilities", in R. M. Thrall-C. H. Coombs-R. L. Davis (editors), *Decision Processes*, John Wiley & Sons, New York, pp.167-180.
- Haywood, Jr., O. G. 1954. "Military Decision and Game Theory", *Journal of the Operations Research Society of America*, Vol.2, n.4, November, pp.365-385.
- Helmer, Olaf. 1952. "Open Problems in Game Theory", *Econometrica*, Vol.20, n.1, January, pp.90-91.
- Henderson, Alexander. 1954. "The Theory of Duopoly", *The Quarterly Journal of Economics*, Vol.68, n.4, November, pp.565-584.
- Hicks, John R. 1932. *The Theory of Wages*, Mac Millan, London.
- _____ 1935. "Annual Survey of Economic Theory: The Theory of Monopoly", *Econometrica*, Vol.3, n.1, January, pp.1-20.
- _____ 1939. *Value and Capital*, Clarendon Press, Oxford.
- _____ 1976. "'Revolutions' in Economics", in S. J. Latsis (editor), *Method and Appraisal in Economics*, Cambridge University Press, Cambridge, pp.207-218
- _____ 1979. *Causality in Economics*, Basic Books, New York.
- Hildenbrand, Werner - Andreu Mas-Colell (editors). 1986. *Contributions to Mathematical Economics. In Honor of Gérard Debreu*, North Holland, Amsterdam.
- Hoffman, Paul - Leon Festinger - Douglas Lawrence. 1954. "Tendencies Toward Group Comparability in Competitive Bargaining", in R. M. Thrall-C. H. Coombs-R. L. Davis (editors), *Decision Processes*, John Wiley & Sons, New York, pp.231-254.
- Hoggatt, Austin C. 1959. "An Experimental Business Game", *Behavioral Science*, Vol.4, n.3, July, pp.192-203.

- Hotelling, Harold. 1929. "Stability in Competition", *Economic Journal*, n.39, pp.41-57 (ediz. consultata: in A. C. Darnell, editor, *The Collected Economics Articles of Harold Hotelling*, Springer-Verlag, New York, 1990, pp.50-63).
- Hurwicz, Leonid. 1945. "The Theory of Economic Behavior", *The American Economic Review*, Vol.35, n.5, December, pp.909-925.
- 1953. "What Has Happened to the Theory of Games", *The American Economic Review*, Vol.43, n.2, May, pp.398-405.
- 1955. "La teoria dei giochi e le decisioni", *L'industria*, n.2, pp.261-268.
- 1960. "Optimality and Informational Efficiency in Resource Allocation Processes", in K. J. Arrow-S. Karlin-P. Suppes (editors), *Mathematical Methods in the Social Sciences 1959*, Stanford, Stanford University Press, pp.27-46.
- 1987. "Oral History III: An Interview", in G. R. Feiwel (editor), *Arrow and the Ascent of Modern Economic Theory*, New York University Press, New York, pp.258-292.
- Ichiishi, Tatsuro. 1983. *Game Theory for Economic Analysis*, Academic Press, New York.
- Ingrao, Bruna - Giorgio Israel. 1987. *La mano invisibile*, Laterza, Roma-Bari.
- Isaacs, Rufus. 1952. *A Pursuit Games with Incomplete Information*, RAND Publication, RM-1316.
- 1965. *Differential Games. A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization*, John Wiley & Sons, New York.
- Isbell, J. R. 1957. "Finitary Games", in M. Dresher-A. W. Tucker-P. Wolfe (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume III*, Princeton University Press, Princeton, pp.79-98.
- 1959. "Absolute Games", in A. W. Tucker-R. D. Luce (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume IV*, Princeton University Press, Princeton, pp.357-396.
- Isbell, J. R. - W. H. Marlow. 1956. "Attrition Games", *Naval Research Logistic Quarterly*, Vol.3, n.1-2, March-June, pp.71-94.
- Jaffé, William. 1948. "Discussion to 'Oligopoly, Monopolistic Competition, and the Theory of Games'", *The American Economic Review*, Vol.38, n.2, May, pp.19-21.
- Jorland, Gérard. 1987. "The Saint Petersburg Paradox. 1713-1937", in L. Krüger-L. J. Daston-M. Heidelberger (editors), *The Probabilistic Revolution. Vol. 1: Ideas in History*, MIT, Cambridge, pp.157-190.

- Justman, E. 1949. "La Théorie des Jeux. Une nouvelle théorie de l'équilibre économique", *Revue d'Économie Politique*, Vol.59, n.5-6, Septembre a Décembre, pp.616-635.
- Kakutani, Shizuo. 1941. "A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem", *Duke Mathematical Journal*, Vol.8, n.3, September, pp.457-459.
- Kalisch, G. K. - J. W. Milnor - J. F. Nash - E. D. Nering. 1954. "Some Experimental n-Person Games", in R. M. Thrall-C. H. Coombs-R. L. Davis (editors), *Decision Processes*, John Wiley & Sons, New York, pp.310-332.
- Kamien, Morton I. - Nancy L. Schwartz. 1983. "Conjectural Variations", *The Canadian Journal of Economics*, Vol.16, n.2, May, pp.191-211.
- Kaplan, Fred. 1983. "Scientists at War. The Birth of the Rand Corporation", *American Heritage*, Vol.34, n.4, June-July, pp.49-64.
- Kaplansky, Irving. 1945. "A Contribution to von Neumann's Theory of Games", *Annals of Mathematics*, Vol.46, n.3, July, pp.474-479.
- Karlin, Samuel 1950. "Operator Treatment of Minmax Principle", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume I*, Princeton University Press, Princeton, pp.133-154.
- 1953. "Reduction of Certain Classes of Games to Integral Equations", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume II*, Princeton University Press, Princeton, pp.125-158.
- 1953a. "The Theory of Infinite Games", *Annals of Mathematics*, Vol.58, n.2, September, pp.371-401.
- 1953b. "On a Class of Games", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume II*, Princeton University Press, Princeton, pp.159-172.
- 1957. "An Infinite Move Game With a Lag", in M. Dresher-A. W. Tucker-P. Wolfe (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume III*, Princeton University Press, Princeton, pp.257-272.
- 1959. *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics. Volume I. Matrix Games, programming, and Mathematical Economics*, Wesley Publishing Company, Reading.
- Kaysen, Carl. 1946. "A Revolution in Economic Theory?", *The Review of Economic Studies*, Vol.14, pp.1-15.
- 1952. "The Minimax Rule of the Theory of Games and the Choice of the Strategy Under Condition of Uncertainty", *Metroeconomica*, Vol.4, n.1, Aprile, pp.5-14.
- Kemeny, John G. 1959. "A New Approach to n-Person Games", in A. W. Tucker-R. D. Luce (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume IV*, Princeton University Press, Princeton, pp.397-406.

- Kemeny, John G. - Oskar Morgenstern - Gerald L. Thompson. 1956. "A Generalization of the von Neumann Model of an Expanding Economy", *Econometrica*, Vol.24, n.2, April, pp.115-136.
- Kemeny, John G. - Gerald L. Thompson. 1957. "The Effect of Psychological Attitudes on the Outcomes of Games", in M. Dresher-A. W. Tucker-P. Wolfe (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume III*, Princeton University Press, Princeton, pp.273-298.
- Klein, Lawrence R. 1987. "Interaction Between General Equilibrium and Macroeconomics: An Interview", in G. R. Feiwel (editor), *Arrow and the Ascent of Modern Economic Theory*, New York University Press, New York, pp.340-358.
- Kline, Morris. 1980. *Mathematics: the Loss of Certainty*, Oxford University Press, New York.
- Knight, F. H. 1921. *Risk, Uncertainty and Profit*, London School of Economic, London.
- Knobloch, Eberhard. 1987. "Emile Borel as a Probabilist", in L. Krüger-L. J. Daston-M. Heidelberger (editors), *The Probabilistic Revolution. Vol. 1: Ideas in History*, MIT, Cambridge, pp.215-235
- Koo, Anthony Y. C. 1959. "Recurrent Objections to the Minimax Strategy", *The Review of Economics and Statistics*, Vol.41, n.1, February, pp.36-41.
- Koopmans, Tjalling C. 1957. *Three Essays on the State of Economic Science*, Mc Graw Hill (ediz. consultata: *Tre saggi sullo stato della scienza economica*, Liguori Editore, Napoli, 1978).
- Koopmans, Tjalling C. (editor). 1951. *Activity Analysis of Production and Allocation*, John Wiley & Sons, New York.
- Kramer, Edna E. 1982. *The Nature and Growth of Modern Mathematics*, Princeton University Press, Princeton.
- Krentel, W. D. - J. C. C. Mc Kinsey - W. V. A. Quine. 1951. "Simplification of Games in Extensive Form", *Duke Mathematical Journal*, Vol.18, n.4, December, pp.885-900.
- Kreps, David M. 1990. *Game Theory and Economic Modelling*, Clarendon Press, Oxford.
- 1990a. *A Course in Microeconomic Theory*, Harvester Wheatsheaf, New York.
- Krüger, Lorenz - Lorraine J. Daston - Michael Heidelberger (editors). 1987. *The Probabilistic Revolution. Vol. 1: Ideas in History*, MIT, Cambridge.
- Kuhn, H. W. 1950. "Extensive Games", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, Vol.36, n.10, October, pp.570-576.

- 1950a. "A Simplified Two-person Games", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume I*, Princeton University Press, Princeton, pp.97-104.
- 1953. "Extensive Games and the Problem of Information", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume II*, Princeton University Press, Princeton, pp.193-216.
- Kuhn, H. W. - A. W. Tucker. 1958. "John von Neumann's work in the Theory of Games and Mathematical Economics", *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol.64, n.3, May, pp.100-122.
- Kuhn, H. W. - Tucker, A. W. (editors). 1950. *Contributions to the Theory of Games. Volume I*, Princeton University Press, Princeton.
- 1953. *Contributions to the Theory of Games. Volume II*, Princeton University Press, Princeton.
- Kuhn, Thomas S. 1987. "What Are Scientific Revolutions?", in L. Krüger-L. J. Daston-M. Heidelberger (editors), *The Probabilistic Revolution. Vol. 1: Ideas in History*, MIT, Cambridge, pp.7-22.
- Lagache, Michel. 1950. "L'analyse structurale en économie: la théorie des jeux", *Revue d'Économie Politique*, Vol.60, n.4, Juillet-Aout, pp.399-418.
- Lakatos, Imre. 1978. *The Methodology of Scientific Research Programmes*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Laplace, Pierre Simon. 1814. *Essai philosophique sur les probabilités*, Paris. (ediz. consultata: *A Philosophic Essay on Probabilities*, Dover Publications, New York, 1951).
- Latsis, Spiro J. 1976. "A Research Programme in Economics", in S. J. Latsis (editor), *Method and Appraisal in Economics*, Cambridge University Press, Cambridge, pp.1-42.
- Latsis, Spiro J. (editor). 1976. *Method and Appraisal in Economics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Leijonhufvud, Axel. 1976. "Schools, 'Revolutions', and Research Programmes in Economic Theory", in S. J. Latsis (editor), *Method and Appraisal in Economics*, Cambridge University Press, Cambridge, pp.65-108.
- Lerner, A. P. - H. W. Singer. 1937. "Some Notes on Duopoly and Spatial Competition", *The Journal of Political Economy*, Vol.45, n.2, April, pp.145-186.
- Lerner, Daniel - Harold D. Lasswell (editors). 1951. *The Policy Sciences. Recent Developments in Scope and Method*, Stanford University Press, Stanford.
- Leunbach, G. 1948. "Theory of games and economic behavior", *Nordisk Tidsskrift for Teknosk Okonomi*, n.1-4, pp.175-178.

- Lindblom, Charles E. 1948. "Bargaining Power in Price and Wage Determination", *Quarterly Journal of Economics*, Vol.LXII, pp.396-417.
- Little, I. M. D. 1950. *A Critique of Welfare Economics*, Clarendon Press, Oxford.
- Loomis, J. L. 1959. "Communication, the Development of Trust and Cooperative Behavior", *Human Relations*, Vol.12, pp.305-315.
- Loomis, Lynn H. 1946. "On a Theorem of von Neumann", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, Vol.32, n.8, August, pp.213-215.
- Lucas, W. F. 1968. "A Game With No Solution", *Bulletin of The American Mathematical Society*, Vol.74, n.4, pp.237-239.
- 1969. "The Proof That A Game May Not Have A Solution", *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol.137, n.1, pp.219-229.
- Luce, R. Duncan. 1954. "A Definition of Stability for n-Person Games", *Annals of Mathematics*, Vol.59, n.3, May, pp.357-366.
- 1959. *Individual Choice Behavior. A Theoretical Analysis*, John Wiley & Sons, New York.
- 1959a. "A Note on the Article 'Some Experimental n-Person Games'", in A. W. Tucker-R. D. Luce (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume IV*, Princeton University Press, Princeton, pp.279-286.
- Luce, R. Duncan - Ernest W. Adams. 1956. "The Determination of Subjective Characteristic Functions in Games with Misperceived Payoff Function", *Econometrica*, Vol.24, n.2, April, pp.158-171.
- Luce, R. Duncan - Howard Raiffa. 1954. *A Survey of the Theory of Games. Behavioral Models Project*, (NR 042-115), dattiloscritto, Santa Monica.
- 1957. *Games and Decisions. Introduction and Critical Survey*, John Wiley & Sons, New York (ediz. consultata: Dover Publications, New York, 1985).
- Luce, R. Duncan - Arnold A. Rogow. 1956. "A Game Theoretic Analysis of Congressional Power Distributions for a Stable Two-Party System", *Behavioral Science*, Vol.1, n.2, April, pp.83-95.
- Lunghini, Giorgio (a cura di). 1987. *Dizionario di Economia Politica. Vol. 13. Econometria. Matematica*, Boringhieri, Torino.
- Malinvaud, E. 1952. "Note on von Neumann-Morgenstern's Strong Independence Axiom", *Econometrica*, Vol.20, n.4, October, p.679.
- Marschak, Jacob. 1946. "Neumann's and Morgenstern's New Approach to Static Economics", *The Journal of Political Economy*, Vol.54, n.2, April, pp.97-115.

- 1950. "Rational Behavior, Uncertain Prospects, and Measurable Utility", *Econometrica*, Vol.18, n.2, April, pp.111-141.
- 1954. "Towards an Economic Theory of Organization and Information", in R. M. Thrall-C. H. Coombs-R. L. Davis (editors), *Decision Processes*, John Wiley & Sons, New York, pp.187-220.
- 1955. "Verso una scala di preferenza per prendere decisioni", *L'industria*, n.3, pp.319-331
- 1974. *Economic, Information, Decision, and Prediction*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- Mayberry, J. P. - J. F. Nash - M. Shubik. 1953. "A Comparison of Treatments of a Duopoly Situation", *Econometrica*, Vol.21, n.1, January, pp.141-154.
- Mc Closkey, Joseph F. - Florence N. Trefethen (editors). 1954. *Operations Research for Management*, The John Hopkins Press, Baltimore.
- Mc Cord Wrigth, David. 1948. "Discussion to 'Oligopoly, Monopolistic Competition, and the Theory of Games'", *The American Economic Review*, Vol.38, n.2, May, pp.30-32.
- Mc Cracken, H. L. 1948. "Discussion to 'Oligopoly, Monopolistic Competition, and the Theory of Games'", *The American Economic Review*, Vol.38, n.2, May, pp.26-30.
- Mc Donald, John. 1948. "Poker: An American Game", *Fortune*, Vol.37, n.3, March, pp.128-131, 181-187.
- 1949. "The Theory of Strategy", *Fortune*, Vol.38, n.6, June, pp.100-110.
- 1950. *Strategy in Poker, Business and War*, W. W. Norton, New York.
- Mc Kenzie, Donald - Graham Spinardi. 1981. "The Shaping of Nuclear Weapon System Technology", *Social Studies of Science*, n.18, pp.419-464, 581-624.
- Mc Kenzie, Lionel. 1954. "On Equilibrium in Graham's Model of World Trade and Other Competitive Systems", *Econometrica*, Vol.22, n.2, April, pp.147-161.
- Mc Kinsey, J. C. C. 1950. "Isomorphism of Games and Strategic Equivalence", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume I*, Princeton University Press, Princeton, pp.117-131.
- 1952. *Introduction to the Theory of Games*, Mc Graw-Hill Book Company, New York.
- Ménard, Claude. 1987. "Why Was There No Probabilistic Revolution in Economic Thought", in L. Krüger-L. J. Daston-M. Heidelberger

- (editors), *The Probabilistic Revolution. Vol. 1: Ideas in History*, MIT, Cambridge, pp.139-146.
- Mendelsohn, E. (editor). 1988. *Science, Technology and the Military*, Kluwer, Boston.
- Milnor, John, 1953. "Sum of Positional Games", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume II*, Princeton University Press, Princeton, pp.291-300.
- 1954. "Games Against Nature", in R. M. Thrall-C. H. Coombs-R. L. Davis (editors), *Decision Processes*, John Wiley & Sons, New York, pp.49-59.
- Milnor, John - L. S. Shapley. 1957. "On Games of Survival", in M. Dresher-A. W. Tucker-P. Wolfe (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume III*, Princeton University Press, Princeton, pp.15-45.
- Mirowski, Philip. 1990. *What Were von Neumann and Morgenstern Trying to Accomplish?*, paper unpublished, University of Notre Dame.
- 1990a. *When Games Grow Deadly Serious: The Military Influence on the Evolution of Game Theory*, paper unpublished, University of Notre Dame.
- Modigliani, Franco. 1956. "New Developments on the Oligopoly Front", *The Journal of Political Economy*, Vol.66, n.6, June, pp. 130-160.
- Moeschlin, O. - D. Pallaschke (editors). 1979. *Game Theory and Related Topics. Proceedings of the Seminar on Game Theory and Related Topics*, Bonn/Hagen, 26-29 September 1978, North Holland, Amsterdam.
- Morgan, Mary S. 1987. "The Probabilistic Revolution in Economics - an Overview", in L. Krüger-L. J. Daston-M. Heidelberger (editors), *The Probabilistic Revolution. Vol. 1: Ideas in History*, MIT, Cambridge, pp.135-138.
- 1990. *The History of Econometric Ideas*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Morgenstern, Oskar. 1928. *Wirtschaftsprognose, Eine Untersuchung ihrer Voraussetzungen und Möglichkeiten*, J. Springer, Vienna.
- 1935. "Vollkommene Voraussicht und wirtschaftliches Gleichgewicht", *Zeitschrift für Nationalökonomie*, Vol.6, n.3, August, pp.337-357 (ediz. consultata: "Perfect Foresight and Economic Equilibrium", in A. Schotter, editor, *Selected Economic Writings of Oskar Morgenstern*, New York University Press, New York, 1976, pp.169-183).
- 1935a. "Das Zeitmoment in der Wertlehre", *Zeitschrift für Nationalökonomie*, Vol.5, n.5, September, pp.433-458 (ediz. consultata: "The Time Moment in Value Theory", in A. Schotter, editor, *Selected Economic Writings of Oskar Morgenstern*, New York University Press, New York, 1976, pp.151-167).

- 1936. "Logistik und Sozialwissenschaften", Zeitschrift für Nationalökonomie, Vol.7, n.1, March, pp. 1-24 (ediz. consultata: "Logistics and Social Sciences", in A. Schotter, editor, Selected Economic Writings of Oskar Morgenstern, New York University Press, New York, 1976, pp.389-404).
- 1937. The Limits of Economics, William Hodge and Company, London.
- 1941. "Professor Hicks on Value and Capital", Journal of Political Economy, Vol.49, n.3, June, pp.361-393 (ediz. consultata: in A. Schotter, editor, Selected Economic Writings of Oskar Morgenstern, New York University Press, New York, 1976, pp.185-217).
- 1948. "Oligopoly, Monopolistic Competition, and the Theory of Games", The American Economic Review, Vol.38, n.2, May, pp.10-18.
- 1948a. "Demand Theory Reconsidered", The Quarterly Journal of Economics, Vol.62, n.2, February, pp.165-201.
- 1949. "Economics and the Theory of Games", Kyklos, Vol.3, n.4, pp.294-308.
- 1949a. "The Theory of Games", Scientific American, Vol.180, n.5, May, pp.22-25.
- 1950. On the Accuracy of Economic Observations, Princeton University Press, Princeton.
- 1951. "La teoria dei giochi e il comportamento economico", L'industria, Vol.3, pp.315-346.
- 1951a. "Abraham Wald, 1902-1950", Econometrica, Vol.19, n.4, October, pp.361-367.
- 1958. "Obituary. John von Neumann, 1903-57", The Economic Journal, Vol.68, n.269, March, pp.170-173.
- 1962. "On the Application of Game Theory to Economics", in Princeton University Conference, The Recent Advances in Game Theory, privately printed, Princeton, papers delivered at a Meeting of the Princeton University Conference, October 4-6, 1961, pp.1-12.
- 1963. Spieltheorie und Wirtschaftswissenschaft, R. Oldenburg, Vienna (ediz. consultata: Teoria dei giochi, Boringhieri, Torino, 1969).
- 1972. "Thirteen Critical Points in Contemporary Economic Theory: An Interpretation", Journal of Economic Literature, Vol.10, n.4, December, pp.1163-1189.
- 1972a. "Descriptive, Predictive and Normative Theory", Kyklos, Vol.25, n.4, pp.699-714.

- 1976. "The Collaboration Between Oskar Morgenstern and John von Neumann on the Theory of Games", *Journal of Economic Literature*, Vol.14, n.3, September, pp.805-816.
- 1976a. "Some Reflections on Utility", in A. Schotter, (editor), *Selected Economic Writings of Oskar Morgenstern*, New York University Press, New York, pp.65-70.
- Morgenstern, Oskar (editor). 1954. *Economic Activity Analysis*, John Wiley & Sons, New York.
- Mosteller, Frederick - Philip Noguee. 1951. "An Experimental Measurement of Utility", *The Journal of Political Economy*, Vol.59, n.5, October, pp.371-404.
- Motzkin, T. S. - H. Raiffa - G. L. Thompson - R. M. Thrall. 1953. "The Double Description Method", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume II*, Princeton University Press, Princeton, pp.51-74.
- Nagel, Ernest - James R. Newman. 1958. *Godel's Proof*, New York University Press, New York (ediz. consultata: *La prova di Godel*, Boringhieri, Torino 1992).
- Nash, John F. 1950. "Equilibrium Points in N-Person Games", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, Vol.36, n.1, January, pp.48-49.
- 1950a. "The Bargaining Problem", *Econometrica*, Vol.18, n.2, April, pp.155-162.
- 1950b. *Theory of Non-cooperative Games*, unpublished, Princeton University, Ph. D. Thesis, May.
- 1951. "Non-Cooperative Games", *Annals of Mathematics*, Vol.54, n.2, September, pp.286-295.
- 1953. "Two-Person Cooperative Games", *Econometrica*, Vol.21, n.1, January, pp.128-140.
- Nash, John F. - L. S. Shapley. 1950. "A Simple Three-person Poker Game", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume I*, Princeton University Press, Princeton, pp.105-116.
- Neisser, Hans. 1952. "L'oligopole, les anticipations et la théorie des jeux", *Économie appliquée*, Vol.5, n.1, Janvier-Mars, pp.225-259.
- 1957. "Oligopoly as a Non-Zero-Sum Game", *The Review of Economic Studies*, Vol.25, n.66, October, pp.1-20.
- Nemchinov, V. S. (editor). 1959. *The Use of Mathematics in Economics*, Oliver & Boyd, Edinburgh.
- Nicholson, M. B. 1967. "The Resolution of Conflict", *The Journal of the Royal Statistical Society*, Vol.130 pp.529-540 (ediz. consultata: in

- O. R. Young, editor, *Bargaining. Formal Theories of Negotiation*, University of Illinois Press Urbana, Illinois, 1975, pp.231-243).
- Novshek, William. 1985. "On the Existence of Cournot Equilibrium", *The Review of Economic Studies*, Vol.52, n.168, January, pp.85-98.
- Nyblen, Göran. 1952. "L'étude de l'inflation: trois méthodes de recherche complémentaires", *Économie appliquée*, Vol.5, n.1, Janvier-Mars, pp.79-91.
- Otter, Richard - J. J. Dunne. 1953. "Games with Equilibrium Points", *Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A.*, Vol.39, pp.310-314.
- Pareto, Vilfredo. 1911. "L'economia matematica", in G. Del Vecchio (a cura di), *Nuova Collana di Economisti Stranieri e Italiani. Volume Quarto. Economia Pura*, UTET, Torino, 1937, pp.329-381.
- Pen, Jan. 1952. "A General Theory of Bargaining", *The American Economic Review*, Vol.62, pp.24-42 (ediz. consultata: in O. R. Young, editor, *Bargaining. Formal Theories of Negotiation*, University of Illinois Press, Urbana, 1975, pp.164-182).
- 1959. *Rate under Collective Bargaining*, MIT Press, Cambridge.
- 1959a. "Comment on the Bargaining Problem", in (id.), *The Wage Rate under Collective Bargaining*, Harvard University Press, Cambridge, pp.X-XIII (ediz. consultata: in O. R. Young, editor, *Bargaining. Formal Theories of Negotiation*, University of Illinois Press Urbana, Illinois, 1975, pp.267-269).
- Pfouts, Ralph W. (editor). 1970. *Essays in Economics and Econometrics. A Volume in Honor of Harold Hotelling*, The University of North Carolina Press, Chapel Hill.
- Pheby, John. 1988. *Methodology and Economics. A Critical Introduction*, Mac Millan Press, London.
- Pigou, A. C. 1924. *The Economics of Welfare*, Mac Millan and Co., London.
- Ponsard, Claude. 1958. *Histoire des theories economiques spatiales*, Librairie Armand Colin, Paris.
- Popper, Karl R. 1983. *Realism and the Aim of Science*, Hutchison, London.
- Predaval Magrini, Maria Vittoria (a cura di). 1979. *Filosofia analitica e conoscenza storica*, La Nuova Italia, Firenze.
- Pribram, Karl. 1983. *A History of Economic Reasoning*, The John Hopkins University Press, Baltimore and London.
- Princeton University Conference. 1962. *The Recent Advances in Game Theory*, privately printed, Princeton, papers delivered at a Meeting of the Princeton University Conference, October 4-6, 1961

- Punzo, Lionello F. 1986. "La rivoluzione neoclassica di Von Neumann e Karl Menger", *Quaderni di storia dell'economia politica*, Vol.4, n.3, pp.89-121.
- 1989. "Von Neumann and Karl Menger's Mathematical Colloquium", in M. Dore-S. Chakravarty-R. Goodwin (editors), *John von Neumann and Modern Economics*, Clarendon Press, Oxford, pp.29-65.
- Quandt, Richard E. 1956. "A Probabilistic Theory of Consumer Behavior", *The Quarterly Journal of Economics*, Vol.70, n.4, November, pp.507-536.
- Raiffa, Howard. 1953. "Arbitration Schemes for Generalized Two-person Games", in H. W. Kuhn- A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume II*, Princeton University Press, Princeton, pp.361-388.
- 1987. "Axiomatic Social Searching", in G. R. Feiwel (editor), *Arrow and the Foundations of the Theory of Economic Policy*, New York University Press, New York, pp.672-677.
- Ramsey, Frank Plumpton. 1931. *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*, Kegan Paul-Trubner & Co., London.
- Rapoport, Anatol. 1959. "Critiques of Game Theory", *Behavioral Science*, Vol.4, n.1, January, pp.49-66.
- 1960. *Fight, Games and Debates*, The University of Michigan Press, Ann Arbor.
- 1966. *Two-Person Game Theory The Essential Ideas*, The University of Michigan Press, Ann Arbor.
- Rapoport, Anatol - Carol Orwant. 1962. "Experimental Games: a Review", *Behavioral Science*, Vol.7, n.1, January, pp.1-37.
- Rasmusen, Eric. 1989. *Games and Information. An Introduction to Game Theory*, Basil Blackwell, Oxford.
- Restrepo, Rodrigo. 1957. "Tactical Problems Involving Several Actions", in M. Dresher-A. W. Tucker-P. Wolfe (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume III*, Princeton University Press, Princeton, pp.313-336.
- Ricciardi, Franc M. 1957. "Business War Games for Executives. A New Concept in Management Training", *The Management Review*, Vol.46, n.5, May, pp.45-56.
- Riker, William H. 1959. "A Test of the Adequacy of the Power Index", *Behavioral Science*, Vol.4, n.2, April, pp.120-131.
- 1990. *The Entry of Game Theory into Political Science*, unpublished, Durham, paper presentato alla Duke University Conference sulla history of game theory.

- Rives Jr., Norfleet W. 1975. "On the History of the Mathematical Theory of Games", *History of Political Economy*, Vol.7, n.4, Winter, pp.549-565.
- Robinson, Austin. 1941. "A Problem in the Theory of Industrial Location", *The Economic Journal*, Vol.51, n.202-23, June-September, pp.270-275.
- Robinson, Joan. 1933. *Economics of Imperfect Competition*, Mac Millan Company, London (ediz. consultata: Mac Millan Company, London, 1948-VII).
- Robinson, Julia. 1951. "An Iterative Method of Solving a Game", *Annals of Mathematics*, Vol.54, n.2, September, pp.296-301.
- Rosenblith, Walter A. 1951. "Book Review. John von Neumann and Oskar Morgenstern 'Theory of Games and Economic Behavior'", *Psychometrika*, Vol.16, n.1, March, pp.141-146.
- Roth, Alvin E. 1979. *Axiomatic Models of Bargaining*, Springer-Verlag, Berlin.
- 1988. "Introduction to the Shapley Value", in A. E. Roth (editor), *The Shapley Value. Essays in Honor of Lloyd S. Shapley*, Cambridge University Press, Cambridge, pp.1-30.
- 1988a. "The Expected Utility of Playing a Game", in A. E. Roth (editor), *The Shapley Value. Essays in Honor of Lloyd S. Shapley*, Cambridge University Press, Cambridge, pp.51-70.
- Roth, Alvin E. (editor). 1987. *Laboratory experimentation in economics. Six points of view*, Cambridge University Press, Cambridge.
- 1988. *The Shapley Value. Essays in Honor of Lloyd S. Shapley*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Rotschild, M. - J. Stiglitz. 1976. "Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay on the Economics of Imperfect Information", *The Quarterly Journal of Economics*, Vol.80, n.2, February, pp.629-649.
- Rubinstein, Ariel. 1991. "Comments on the Interpretation of Game Theory", *Econometrica*, Vol.59, n.4, July, pp.909-924.
- Rubinstein, Ariel (editor). 1990. *Game Theory in Economics*, Edward Elgar, England.
- Samuels, Warren J. 1974. "The History of Economic Thought as Intellectual History", *History of Political Economy*, Vol.6, n.3, Fall, pp.305-323.
- Samuelson, Paul A. 1952. "Probability, Utility, and the Independence Axiom", *Econometrica*, Vol.20, n.4, October, pp.670-678.
- 1989. "A Revisionist View of von Neumann's Growth Model", in M. Dore-S- Chakravarty-R. Goodwin (editors), *John von Neumann and Modern Economics*, Clarendon Press, Oxford, pp.100-122.

- Savage, Leonard J. 1954. *The Foundations of Statistics*, John Wiley & Sons, New York (ediz. consultata: Dover Publications, New York, 1972).
- Scarf, H. E. 1957. "On Differential Games With Survival Payoff", in M. Dresher-A. W. Tucker-P. Wolfe (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume III*, Princeton University Press, Princeton, pp.393-406.
- Scarf, H. E. - L. S. Shapley. 1957. "Games With Partial Information", in M. Dresher-A. W. Tucker-P. Wolfe (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume III*, Princeton University Press, Princeton, pp.213-230.
- Schelling, Thomas C. 1958. "The Strategy of Conflict: Prospectus for a Reorientation of Game Theory", *The Journal of Conflict Resolution*, Vol.2, n.3, September, pp.203-264.
- 1959. "For the Abandonment of Symmetry in Game Theory", *The Review of Economics and Statistics*, Vol.41, n.3, August, pp.213-224.
- 1960. *The Strategy of Conflict*, Harvard University Press, Cambridge.
- Schmidt, Christian. 1990. "Game Theory and Economics: An Historical Survey", *Revue d'Economie Politique*, Vol.100, n.5, Sept.-Oct., pp.589-618.
- Schotter, Andrew. 1981. *The Economic Theory of Social Institutions*, Cambridge University Press, Cambridge.
- 1991. Oskar Morgenstern's Contribution to the Development of the Theory of Games, CV Starr Center for Applied Economics, unpublished, Economic Research Papers RR 91-08, New York University.
- Schotter, Andrew (editor). 1976. *Selected Economic Writings of Oskar Morgenstern*, New York University Press, New York.
- Schotter, Andrew - Gerhard Schwödiauer. 1980. "Economics and the Theory of Games: A Survey", *Journal of Economic Literature*, Vol.18, n.2, June, pp.479-527.
- Schumpeter, Joseph A. 1954. *History of Economic Analysis*, Oxford University Press, New York.
- Schweber, Silvan. 1988. "The Mutual Embrace of Science and the Military", in E. Mendelsohn (editor), *Science, Technology and the Military*, Kluwer, Boston, pp.1-45.
- Scodel, A. - J. S. Minas - P. Ratoosh - M. Lipetz. 1959. "Some Descriptive Aspects of Two-Person, Non Zero-Sum Games. I", *The Journal of Conflict Resolution*, Vol.3, pp.114-119.

- Selten, Reinhard. 1985. "Comment to 'What is Game Theory Trying to Accomplish?'", in K. J. Arrow-S. Honkapohja (editors), *Frontiers of Economics*, Basil Blackwell, Oxford, pp.77-87.
- Sen, Amartya K. 1977. "Rational Fools: A Critique of the Behavioral Foundations of Economic Theory", *Philosophy & Public Affairs*, Vol.6, n.4, Summer, pp.317-344.
- Shackle, G. L. S. 1949. *Expectations in Economics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- 1967. *The Years of High Theory. Invention and Tradition in Economic Thought 1926-1939*, Cambridge University Press, Cambridge
- Shapley, Lloyd S. 1953. "A Value for n-Person Games", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume II*, Princeton University Press, Princeton, pp.307-318.
- 1953a. "Quota Solutions of n-Person Games", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume II*, Princeton University Press, Princeton, pp.343-360
- 1953b. "Stochastic Games", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, Vol.39, n.10, October, pp.1095-1100.
- 1959. "The Solutions of a Symmetric Market Game", in A. W. Tucker-R. D. Luce (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume IV*, Princeton University Press, Princeton, pp.145-162.
- 1959a. "Equilibrium Points in Games With Vector Payoffs", *Naval Research Logistic Quarterly*, Vol.6, n.1, March, pp.57-61.
- 1964. "Some Topics in Two-Person Games", in M. Dresher-L. S. Shapley-A. W. Tucker (editors), *Advances in Game Theory*, Princeton University Press, Princeton, pp. 1-28.
- Shapley, Lloyd S. - Martin, Shubik. 1954. "A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System", *The American Political Science Review*, Vol.48, n.3, September, pp.787-792.
- 1967. "Concepts and Theories of Pure Competition", in M. Shubik (editor), *Essays in Mathematical Economics. In Honor of Oskar Morgenstern*, Princeton University Press, Princeton, pp.63-81.
- Shapley, Lloyd S. - R. N. Snow. 1950. "Basic Solutions of Discrete Games", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume I*, Princeton University Press, Princeton, pp.27-36.
- Sherman, Seymour. 1951. "Games and Sub-games", *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol.2, n.2, April, pp.186-188.
- Shiffman, Max. 1953. "Games of Timing", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume II*, Princeton University Press, Princeton, pp.97-124.

- Shubik, Martin. 1952. "A Business Cycle Model With Organized Labor Considered", *Econometrica*, Vol.20, n.2, April, pp.284-294.
- 1952a. "Information, Theories of Competition, and the Theory of Games", *The Journal of Political Economy*, Vol.60, n.2, April, pp.141-150.
- 1953. *Competition and the Theory of Games*, Ph. D. Thesis, dattiloscritto, Princeton.
- 1953a. "The Role of Game Theory in Economics", *Kyklos*, Vol.6, n.1, pp.21-32.
- 1955. "A Comparison of Treatments of a Duopoly Problem (Part II)", *Econometrica*, Vol.23, n.4, October, pp.417-431.
- 1955a. "The Uses of Game Theory in Management Science", *Management Science*, Vol.2, n.1, October, pp.40-54.
- 1959 *Strategy and Market Structure. Competition, Oligopoly and the Theory of Games*, John Wiley & Sons, New York.
- 1959a. "Edgeworth Market Games", in A. W. Tucker-R.D. Luce (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume IV*, Princeton University Press, Princeton, pp.267-278.
- 1964. *Game Theory and Related Approaches to Social Behavior. Selections*, John Wiley & Sons, New York.
- 1967. *Essays in Mathematical Economics. In Honor of Oskar Morgenstern*, Princeton University Press, Princeton.
- 1982. *Game Theory in Social Sciences. Concepts and Solutions*, The Mit Press, Cambridge (ediz. consultata: The Mit Press, Cambridge, 1989-V).
- 1984. *A Game-Theoretic Approach to Political Economy*, The Mit Press, Cambridge.
- 1985. "Comment to 'What is Game Theory Trying to Accomplish?'"', in K. J. Arrow-S. Honkapohja (editors), *Frontiers of Economics*, Basil Blackwell, Oxford, pp.88-99.
- 1988. *Game Theory and Experimental Gaming*, unpublished, Cowles Foundation Discussion Paper n. 891, Yale University, Yale.
- 1989. "Oskar Morgenstern" in J. Eatwell-M. Milgate-P. Newman (editors), *The New Palgrave Game Theory*, W. W. Norton, New York, pp.164-165.
- Shubik, Martin (editor). 1954. *Readings in Game Theory and Political Behavior*, Doubleday & Company, Garden City.
- Shubik, Martin - Richard Levitan. 1980. *Market Structure and Behavior*, Harvard University Press, Cambridge.

- Shubik, Martin - Gerald L. Thompson. 1959. "Games of Economic Survival", *Naval Research Logistic Quarterly*, Vol.6, n.2, June, pp.111-124.
- Simon, Herbert A. 1955. "A Behavioral Model of Rational Choice", *The Quarterly Journal of Economics*, Vol.69, n.1, February, pp.99-118.
- 1957. *Models of Man. Social and Rational*, John Wiley & Sons, New York.
- Sion, Maurice - Philip Wolfe. 1957. "On a Game Without a Value", in M. Dresher-A. W. Tucker-P. Wolfe (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume III*, Princeton University Press, Princeton, pp.299-306.
- Smith, Vernon L. 1990. *Game Theory and Experimental Economics: The Early Years*, unpublished, Durham, paper prepared for the Conference on the History of Game Theory, Duke University, 5-6 October.
- Smith, Walter L. 1978. "Harold Hotelling 1895-1973", *The Annals of Statistics*, Vol.6, n.6, November, pp.1173-1183.
- Smithies, Arthur. 1941. "Optimum Location in Spatial Competition", *The Journal of Political Economy*, Vol.49, n.6, June, pp.423-439 (ediz. consultata in R. D. Dean-W. H. Leahy-D. L. Mc Kee, editors, *Spatial Economic Theory*, The Free Press, New York, 1970, pp.119-132).
- Smithies, Arthur - L. J. Savage. 1940. "A Dynamic Problem in Duopoly", *Econometrica*, Vol.8, n.2, April, pp.130-143.
- Snyder, Richard C. 1955. "Game Theory and the Analysis of Political Behavior", in S. K. Bailey et al., *Research Frontiers in Politics and Government*, The Brookings Institution Washington, pp.70-103.
- Spaventa, Luigi. 1989. "Introduzione", in L. Spaventa (a cura di), *La teoria dei giochi e la politica economica*, Il Mulino, Bologna, pp.7-12.
- Spaventa, Luigi (a cura di). 1989. *La teoria dei giochi e la politica economica*, Il Mulino, Bologna.
- Spence, A. M. 1974. *Market Signaling*, Harvard University Press, Cambridge.
- Spiegel, Henry William. 1983. *The Growth of Economic Thought*, Duke University Press, Durham.
- Spohn, Wolfgang. 1982. "How to Make Sense of Game Theory", in W. Stegmüller-W. Balzer-W. Spohn (editors), *Philosophy of Economics. Proceedings. Munich, July 1981*, Springer-Verlag, Berlin, pp.239-270.
- Ståhl, Ingolf. 1972. *Bargaining Theory*, EFI, Stockholm.
- Stegmüller, W. - W. Balzer - W. Spohn (editors) 1982. *Philosophy of Economics. Proceedings. Munich, July 1981*, Springer-Verlag, Berlin.

- Steinhaus, H. 1960. "Definitions for a Theory of Games and Pursuit", *Naval Research Logistic Quarterly*, Vol.7, n.2, June, pp.105-108.
- Stigler, George J. 1950. "The Development of Utility Theory. I", *The Journal of Political Economy*, Vol.58, n.4, August, pp.307-327.
- 1950a. "The Development of Utility Theory. II", *The Journal of Political Economy*, Vol.58, n.5, October, pp.373-396.
- Stone, Jeremy J. 1958. "An Experiment in Bargaining Games", *Econometrica*, Vol.26, n.2, April, pp.286-296.
- Stone, Richard. 1948. "The Theory of Games", *The Economic Journal*, Vol.58, n.230, June, pp.185-201.
- Sylos Labini, Paolo. 1956. *Oligopolio e progresso tecnico*, Giuffrè, Milano (ediz. consultata: Einaudi, Torino, 1982).
- Takayama, Akira. 1985. *Mathematical Economics*, Cambridge University Press, Cambridge (seconda edizione).
- Tani, Piero. 1987. "Matematica" in G. Lunghini (a cura di), *Dizionario di Economia Politica*. Vol. 13 *Econometria. Matematica*, Boringhieri, Torino, pp.63-186.
- Thompson, F. B. 1952. *Equivalence of Games in Extensive Form*, Research Memorandum RM-759, The RAND Corporation, Santa Monica.
- Thompson, Gerald L. 1953. "Signaling Strategies in n-Person Games", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games*. Volume II, Princeton University Press, Princeton, pp.267-278.
- 1953a. "Bridge and Signaling", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games*. Volume II, Princeton University Press, Princeton, pp.279-290.
- 1956. "Decision Making and New Mathematics", *Naval Research Logistic Quarterly*, Vol.3, n.3, September, pp.141-149.
- 1958. *Lectures on Game Theory, Markov Chains, and Related Topics*, Sandra Corporation Monograph.
- 1989. "John von Neumann's Contributions to Mathematical Programming Economics", in M. Dore-S. Chakravarty-R. Goodwin (editors), *John von Neumann and Modern Economics*, Clarendon Press, Oxford, pp.221-237.
- 1989a "John von Neumann", in J. Eatwell-M. Milgate-P. Newman (editors), *The New Palgrave Game Theory*, W. W. Norton, New York, pp.242-252.
- Thrall, Robert M. 1954. "Applications of Multidimensional Utility Theory", in R. M. Thrall-C. H. Coombs-R. L. Davis (editors), *Decision Processes*, John Wiley & Sons, New York, pp.181-186.

- Thrall, Robert M. - C. H. Coombs - R. L. Davis (editors). 1954. *Decision Processes*, John Wiley & Sons, New York.
- Tintner, Gerhard. 1957. "La teoria dei giochi, la programmazione lineare e l'analisi delle interdipendenze strutturali", *L'industria*, n.3, pp.505-537; n.4, pp.653-671.
- Todhunter, I. 1865. *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*, Cambridge (ediz. consultata: Chelsea Publishing Company, New York, 1965).
- Tompkin, C. 1950. "Probabilistic Problems and Military Evaluation: An Example", *Logistic Papers*, The George Washington University, Vol.2, pp.130-145.
- Triffin, Robert. 1941. *Monopolistic Competition and General Equilibrium Theory*, Harvard University Press, Cambridge.
- Tucker, A. W. - R. Duncan Luce (editors). 1959. *Contributions to the Theory of Games. Volume IV*, Princeton University Press, Princeton.
- Ulam, S. 1958. "John von Neumann, 1903-1957", *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol.64, n.3, May, pp.1-49.
- Ventzel, E. S. 1961. *Lectures on Game Theory*, Hindustan Publishing Corporation, Delhi.
- Vickrey, William. 1945. "Measuring Marginal Utility by Reactions to Risk", *Econometrica*, Vol.13, n.4, October, pp.319-333.
- Ville, Jean. 1938. "Sur la théorie générale des jeux intervient l'habileté des joueurs", in *Traité du calcul des probabilités et de ses applications, Applications des jeux de hasard*, Gauthier-Villars, Paris, Vol.IV, Fasc.2, pp.105-117.
- Vinacke, W. Edgar - Abe Arkoff. 1957. "An Experimental Study of Coalitions in the Triad", *American Sociological Review*, Vol.22, n.4, August, pp.406-414.
- von Hayek, Friedrich August. 1988. *Conoscenza, mercato, pianificazione*, Il Mulino, Bologna.
- von Neumann, John. 1928. "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele", *Mathematische Annalen*, n.100, pp.295-320 (ediz. consultata: "On the Theory of Games of Strategy", in A. W. Tucker-R. D. Luce, editors, *Contributions to the Theory of Games. Volume IV*, Princeton University Press, Princeton, 1959, pp.13-43).
- 1938. "Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes", in K. Menger (ed.), *Ergebnisse eines Mathematischen Seminars*, Vienna (ediz. consultata: "A Model of General Economic Equilibrium", *The Review of Economic Studies*, Vol.13, 1945-46, pp.1-9).
- 1953. "Communications on the Borel Notes", *Econometrica*, Vol.21, n.1, January, pp.124-127.

- 1953a. "A Certain Zero-sum Two-person Game Equivalent to the Optimal Assignment Problem", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), Contributions to the Theory of Games. Volume II, Princeton University Press, Princeton, pp.5-12.
- 1961. Collected Works. Vol. I, Pergamon, New York.
- von Neumann, John - Oskar Morgenstern. 1944. Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, Princeton, (ediz. consultata: Princeton University Press, Princeton, 1947-II).
- von Stackelberg, Heinrich. 1933. "Sulla teoria del duopolio e del polipolio", Rivista Italiana di Statistica, Economia e Finanza, Vol.5, n.2, Giugno, pp.275-289.
- 1934. Marktform und Gleichgewicht, Vienna and Berlin. (ediz. consultata: The Theory of the Market Economy, William Hodge, London, 1952).
- Vorob'ev, N. N. 1977. Game Theory. Lectures for Economists and Systems Scientists, Springer-Verlag, New York.
- Wagner, Harvey M. 1957. "A Unified Treatment of Bargaining Theory", Southern Economic Journal, Vol.23, pp.380-397 (ediz. consultata: in O. R. Young, editor, Bargaining. Formal Theories of Negotiation, University of Illinois Press Urbana, Illinois, 1975, pp.270-287).
- 1958. "Rejoinder on the Bargaining Problem", Southern Economic Journal, Vol.24, pp.476-482 (ediz. consultata: in O. R. Young, editor, Bargaining. Formal Theories of Negotiation, University of Illinois Press Urbana, Illinois, 1975, pp.293-299).
- Wald, Abraham. 1945. "Statistical Decision Functions Which Minimize the Maximum Risk", Annals of Mathematics, Vol.46, n.2, April, pp.265-280.
- 1945a. "Generalization of a Theorem by v. Neumann Concerning Zero Sum Two Person Games", Annals of Mathematics, Vol.46, n.2, April, pp.281-286.
- 1947. "Book Reviews. Theory of Games and Economic Behavior", The Review of Economics and Statistics, Vol.29, n.1, February, pp.47-52.
- 1947a. "Foundations of a General Theory of Sequential Decision Functions", Econometrica, Vol.15, n.4, October, pp.279-313.
- 1950. "Notes on Zero Sum Two Person Games", Annals of Mathematics, Vol.52, n.3, November, pp.739-742.
- Waldegrave, James. 1713. "Excerpt from a Montmort's Letter to Nicholas Bernoulli", in W. J. Baumol- S. M. Goldfeld (editors), Precursor in Mathematical Economics: An Anthology, The London School of Economics and Political Science, London, 1968, pp.1-9.

- Weintraub, E. Roy. 1983. "On the Existence of a Competitive Equilibrium: 1930-1954", *Journal of Economic Literature*, Vol.21, n.1, March, pp.1-39.
- 1991. *Stabilizing Dynamics. Constructing Economic Knowledge*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Weintraub, Sidney. 1960. "Oligopoly and Game Theory", *Kyklos*, Vol.13, n.3, pp.400-406.
- Weyl, H. 1950. "Elementary Proof of a Minimax Theorem due to von Neumann", in H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors), *Contributions to the Theory of Games. Volume I*, Princeton University Press, Princeton, pp.19-26.
- Williams, John Davis. 1954. *The Compleat Strategyst. Being a Primer on the Theory of Games of Strategy*, Mc Graw-Hill, New York (ediz. consultata: Dover Publications, New York 1982).
- Wold, H. 1952. "Ordinal Preferences or Cardinal Utility?", *Econometrica*, Vol.20, n.4, October, pp.661-664.
- Wolfe, Philip. 1955. "The Strict Determinateness of Certain Infinite Games", *Pacific Journal of Mathematics*, Vol.5, suppl.2, pp.841-847.
- Young, Oran R. 1975. "Strategic Interaction and Bargaining", in O. R. Young (editor), *Bargaining. Formal Theories of Negotiation*, University of Illinois Press, Urbana, pp.3-19.
- Young, Oran R. (editor). 1975. *Bargaining. Formal Theories of Negotiation*, University of Illinois Press Urbana, Illinois.
- Zachrisson, L. E. 1957. "A Tank Duel with Game-Theoretic Implication", *Naval Research Logistic Quarterly*, Vol.4, n.2, June, pp.131-138.
- Zauberman, Alfred. 1975. *Differential Games and Other Game-Theoretic Topics in Soviet Literature. A Survey.*, New York University Press, New York.
- Zermelo, E. 1913. "Uber eine Anwendung der engenlehre auf die Theorie des Schachspiels", *Proceedings, Fifth International Congress of Mathematicians*, University of Cambridge, Cambridge, vol.II, pp.501-504.
- Zeuthen, Frederik. 1930. "Economic Warfare" in *Problems of Monopoly and Economic Warfare*, Routledge and Kegan Paul, London, pp.104-135 (ediz. consultata: in O. R. Young, editor, *Bargaining. Formal Theories of Negotiation*, University of Illinois Press, Urbana, Illinois, 1975, pp.145-163).
- 1933. "Theoretical Remarks on Price Policy Hotelling's Case with Variations", *The Quarterly Journal of Economics*, Vol.369, February, pp.231-253.
- 1937. "On the Determinateness of the Utility Function", *The Review of Economic Studies*, Vol.4, n.3, June, pp.236-239.

NOTE

1. Cfr. I. Lakatos (1978).
2. Cfr. R. M. Fisher (1986), pp. 56-70. Altri riferimenti per la discussione sono E. R. Weintraub (1983), E. R. Weintraub (1991), M. Blaug (1976).
3. Cfr. E. R. Weintraub (1991), p. 5 e W. J. Samuels (1974), pp. 308-309.
4. W. J. Samuels (1974), p. 308.
5. Cfr. D. F. Gordon (1965), M. Bronfenbrenner (1971), R. M. Fisher (1986).
6. Cfr. T. S. Kuhn (1987).
7. A. Leijonhufvud (1976), p. 78.
8. Cfr. J. A. Schumpeter (1954), p. 6.
9. Cfr. A. W. Coats (1969), E. R. Weintraub (1991), p. 4.
10. Per citare solo due esempi autorevoli, nelle storie del pensiero economico di R. Backhouse (1987) e di K. Pribram (1983), la teoria dei giochi viene trattata solo nei capitoli dedicati all'analisi della contrattazione e alla decisione in condizioni di incertezza.
11. A. Rapoport (1959), p. 52.
12. G. T. Guilbaud (1951), p. 46.
13. A pag. 7 di J. von Neumann-O. Morgenstern (1944), si rileva che: "Economists frequently point to much larger, more burning questions, and brush everything aside which prevents them from making statements about these. The experience of more advanced sciences, for example physics, indicates that this impatience merely delays progress, including that of the treatment of the burning questions. There is no reason to assume the existence of shortcuts."
14. "the mathematics of game theory provides an escape from the straight-jacket put on mathematical economic thinking by the use of models whose intellectual basis appear to be classical mechanics. We have used the mathematical apparatus to help generalize concepts such as equilibrium and to help differentiate and sort out other problems. Its power and usefulness comes in its flexibility." M. Shubik (1953), p. 255.
15. Dai diari di Oskar Morgenstern, in P. Mirowski (1990), p. 22.
16. R. Aumann (1987), p. 467.
17. Una conferma a questa affermazione proviene da Ken Binmore e Partha Dasgupta: "In spite of early hopes it is only in recent years that the von Neumann and Morgenstern theory of games has begun to be genuinely fruitful in economic analysis. In retrospect, it seems clear that the delay was due only in part to the incompleteness of the theory, since much of what is now being used has been available in essence from the early 1950s. A larger stumbling block has been the problem of determining under what circumstances the available theory is (or is not) applicable)." K. Binmore-P. Dasgupta (1987), p. 1.
18. La determinazione dell'"hard core" è considerata da molti autori la fase centrale, ed anche di più difficile realizzazione, della teoria di Lakatos (cfr. J. Pheby, 1988, pp. 59-60 e 62-65, R. Cross, 1982, pp. 330-331, G. Fulton, 1984, M. Blaug, 1976).
19. J. R. Hicks (1979), p. 67.
20. Si può escludere l'interazione strategica quando un agente economico può assumere come invariante l'ambiente esterno. Ciò si

- verifica se egli è perfettamente informato sulla relazione tra le sue azioni e gli effetti che esse provocano e se:
- a) le sue scelte non sono funzione delle scelte degli altri;
 - b) in presenza di altri agenti e in assenza di possibilità di coordinazione tra gli individui, se, in base alla legge dei grandi numeri, così tanti individui compongono l'ambiente che l'azione di un singolo agente non influisce su quella degli altri;
 - c) se, con molti agenti, il processo che ne coordina le azioni è fisso.
21. Marshall tenta di discutere questo problema, ma per uno degli autori di *Theory of Games*, Oskar Morgenstern, raggiunge solo risultati parziali: "Alfred Marshall has tried to cope with this particular difficulty, but has hardly succeeded in more than drawing attention to the phenomenon." O. Morgenstern (1949), p. 297.
 22. Robert Triffin definisce nel 1941 il modello di Walras come "an heavy and magnificent superstructure" R. Triffin (1941), p. 79.
 23. Cfr. J. von Neumann-O. Morgenstern (1944), pp. 9-12.
 24. L'agente economico si trova di fronte alla "Stoic's dichotomy between a player's own actions, which he may properly be assumed to control absolutely, and those of his opponents, which he can neither control nor accurately predict." J. H. Case (1979), p. 31.
 25. Cfr. M. I. Kamien-N. L. Schwartz (1983).
 26. "Cournot, che era un matematico di formazione e di professione, si propose esplicitamente di considerare, nell'ambito dell'economia, problemi che si prestassero alla applicazione di quel ramo dell'analisi, il cui oggetto è lo studio delle funzioni arbitrarie sottomesse soltanto a certe condizioni; nonché di costruire, con l'aiuto della matematica, una teoria, essenzialmente deduttiva, che potesse servire di sostegno per l'osservazione dei fatti economici e per la loro misurazione statistica." P. Tani (1987), pp. 71-72.
 27. Cfr. A. Cournot (1838), cap. VII.
 28. Cournot esclude la collusione per ipotesi: "We say each independently, and this restriction is essential, as will soon appear; for if they should come to an agreement so as to obtain for each the greatest possible income, the results would be entirely different, and would not differ, so far as consumers are concerned, from those obtained in treating a monopoly" A. Cournot (1838), pp.79-80. Più avanti, Cournot ritorna sulla questione rilevando che la collusione non è proponibile perché, venendo meno ad essa, un'impresa può ottenere almeno un beneficio temporaneo (cfr. A. Cournot, 1838, p. 82).
 29. "Proprietor (1) can have no direct influence on the determination of D2: all that he can do, when D2 has been determined by proprietor (2), is to choose for D1 the value which is best for him." A. Cournot (1838), p. 83.
 30. Una dimostrazione generale dell'esistenza dell'equilibrio di Cournot in un mercato oligopolistico è data da W. Novshek (1985), che adotta l'unica ipotesi di relazione decrescente tra il ricavo marginale di ogni impresa e la produzione aggregata delle concorrenti. Prima di Novshek, tutte le dimostrazioni avevano adottato funzioni di produzione con costi decrescenti o imprese a tecnologia identica. L'equilibrio è unico se, quando tutte le imprese eccetto una cambiano il livello di produzione, il livello di produzione ottimale di quest'ultima varia di un ammontare minore (Cfr. J. W. Friedman, 1977).

31. Cfr., per esempio, J. W. Friedman (1977), e D. Kreps (1990), pp. 156-157.
32. Cfr. J. H. Case (1979), p. 42.
33. Secondo questa interpretazione, il modello di Cournot anticipa le condizioni di equilibrio di Nash, che costituisce il progresso teorico più importante della teoria dei giochi negli anni '50 (cfr. par. 5.2).
34. L'obiezione fatta da Leonid Hurwicz è molto chiara: "Thus, the individual's 'rational behavior' is determinate if the pattern of behavior of 'others' can be assumed a priori known. But the behavior of 'others' cannot be known a priori if the 'others', too, are to behave rationally! Thus a logical impasse is reached." L. Hurwicz (1945), p. 910. Cournot è criticabile anche su un piano metodologico: "Cournot probably saw the necessity of creating a good abstract model before going on to strive for a semblance of institutionally ephemeral 'reality'. However, a good abstract model is by its very nature the product of a deep realization of the underlying mechanics of a set of actual phenomenon. Cournot may have had the right approach but he was unable to carry out his abstraction in a satisfactory manner." M. Shubik (1953a), p. 24.
35. Il modello è 'aperto', nel senso che non esplicita tutte le variabili impiegate. Per Binmore e Dasgupta, Cournot adotta questa semplificazione stimando rilevanti solo le decisioni delle imprese e non quelle dei consumatori, che accettano passivamente le prime (cfr. K. Binmore-P. Dasgupta, 1987, p. 28).
36. Si escludono cioè tutte le altre determinanti della domanda, oltre alla possibilità che si verificino eccessi di domanda.
37. Cfr. P. Tani (1987), pp. 71-72.
38. L'importanza di Bertrand appare sopravvalutata poiché egli non elabora una teoria compiuta di competizione basata sui prezzi, come gli viene solitamente riconosciuto dalla critica moderna. Bertrand si limita a formulare alcune critiche all'analisi di Cournot, senza formulare un modello alternativo. E' l'opera successiva di Edgeworth che assolve questo compito.
40. J. Bertrand (1883), p. 503.
41. Cournot aveva considerato questa possibilità nel definire le condizioni di equilibrio, ma l'aveva esclusa in virtù dei 'benefici temporanei' che provengono dal venire meno ad un accordo di collusione perfetta (cfr. Cournot, 1883, p. 82).
42. J. Bertrand (1883), p. 503.
43. J. Bertrand (1883), p. 503. Pareto, citando questa frase, la giudica un 'errore inspiegabile', in quanto l'equazione $p=f(D_1+D_2)$ deve necessariamente avere due variabili indipendenti per essere risolta e Cournot sceglie proprio D_1 e D_2 . Pareto non tiene però conto dell'ultima frase ('Le contraire est de toute evidence'), che sembra dimostrare come la critica di Bertrand sia il frutto di una considerazione empirica piuttosto che matematica (cfr. V. Pareto, 1911, pp. 347-348, Nota 2).
44. In Bertrand, "the hallmark of his approach is that firms are seen as directly controlling the prices of their products." K. Binmore-P. Dasgupta (1986), p. 29.
45. "The Bertrand model represents a radical and important departure from Cournot model, wherein strategic consumers have been added to the game. The introduction of consumers as strategic agents in the Cournot model also eliminates the Cournot outcome, by enforcing a collusive solution." A. F. Daughety (1988), p. 19.
46. Cfr. F. Y. Edgeworth (1897).

47. Edgeworth non introduce esplicitamente questa ipotesi, limitandosi ad affermare che la sua dimostrazione si fonda sul principio di produttività decrescente, sufficiente per porre un limite superiore alla produzione (cfr. F. Y. Edgeworth, 1897, p. 26).
48. F. Y. Edgeworth (1897), p. 26.
49. F. Y. Edgeworth (1897), pp. 22-23.
50. Cfr. M. I. Kamien-N. L. Schwartz (1983), p. 191.
51. Cfr. R. Frisch (1933).
52. Cfr. A. L. Bowley (1924), p. 38.
53. Solo una rilettura nel linguaggio della teoria dei giochi consente di valutare l'approccio di Bowley come un modello statico che sintetizza interazioni dinamiche complesse (Cfr. A. F. Daughety, 1988, p. 36).
54. "These movements would be unpredictable - except, perhaps, by a psychologist" R. H. Coase (1935), p. 139.
55. R. H. Coase (1935), p. 140. A una conclusione sostanzialmente simile arriva, pochi anni prima di Coase, anche Chamberlin, nell'ambito di un modello statico di duopolio con reazioni congetturali: "Under these circumstances, no assumption as to the intelligence which the sellers apply to the pursuit of their maximum gain, short of omniscience, would render the outcome determined." E. H. Chamberlin (1933), p. 53.
56. A. Smithies-L. J. Savage (1940), p. 131.
57. Le produzioni delle imprese variano nella stessa direzione: se uno dei due aumenta la produzione nel periodo 1, l'altro l'aumenterà nel periodo 2.
58. Nel secondo caso, l'automatismo ipotizzato esclude ogni relazione tra le quantità prodotte tra le due imprese.
59. H. Von Stackelberg (1933), p. 278.
60. R. Triffin (1941), p. 50.
61. "The Stackelberg solution is an old and beloved fiction of economic theory. But it is only that a fiction. It is based on ignorance of the most important attribute that a competitor's action can have, namely its robustness. When that attribute is properly accounted for, one sees immediately that the degree of followership that Stackelberg postulates is impossible. Instead a much more limited form of followership presents itself, which leads back to the conclusion that a solution is a pair of robust actions, better likened to Cournot's conception than to Stackelberg's." J. H. Case (1979), p. 45. Oppure: "The psychology of Stackelberg's duopolists is rather puzzling. Their only ambition is to persuade their rival to accept either the position of leader, or the position of follower, depending upon which of the two is more favorable to their own interests. Their only strategy to achieve this purpose is to play a kind of poker game, bluffing the rival into believing that, for their part, they are immovably determined to stick at all costs to the preferred position, and that the rival had better resign himself to the correlative position." R. Triffin (1941), p. 74.
62. E' William Fellner, nel 1949, il primo economista ad interpretare correttamente la posizione di von Stackelberg: "When considering Stackelberg's system the most mature product growing out of the preceding stages of development, we imply that reaction function with conjectural variation have proved a blind alley" W. Fellner (1949), p. 119.
63. L'articolo di Hotelling è un riferimento importante anche nella teoria della localizzazione industriale, per la sua influenza

- sull'opera di Palander (Cfr. C. Ponsard, 1958, p. 106 e R. D. Dean-W. H. Leahy-D. L. McKee (editors), 1970, p. VII).
64. C. D'Aspremont-J. Jaskold Gabszewicz-J. F. Thisse (1979) confutano la soluzione di Hotelling mostrando che: a) nessuna soluzione di prezzo di equilibrio esiste quando ambedue i venditori non sono abbastanza lontani tra di loro, b) una versione modificata del modello di Hotelling mostra che entrambi i duopolisti tendono invece a massimizzare la propria differenziazione.
 65. E' interessante notare che nella prefazione alla seconda edizione del loro libro, von Neumann e Morgenstern fanno riferimento alla presenza di appendici sulle applicazioni della teoria dei giochi al problema della locazione industriale, che "were also planned, but had to be abandoned because of the pressure of other work" J. von Neumann-O. Morgenstern (1944), p. V.
 66. Cfr. R. Dorfman-P. A. Samuelson-R. M. Solow (1958), p. 427, A. C. Darnell (1990), p. 14, D. Fudenberg-J. Tirole (1991), pp. 14-15 e 484.
 67. L'analisi di Hotelling "inclut dans la même analyse les rapports entre la formation des prix, l'aire des marchés et la localisation des vendeurs" C. Ponsard (1958), p. 51.
 68. H. Hotelling (1929), p. 51.
 69. Hotelling fa propria quindi la critica di Bertrand a Cournot, introducendo un consumatore-agente attivo ("he has injected price-searching consumer" A. F. Daughety, 1988, p. 24), ma arriva a conclusioni diverse.
 70. Paradossalmente, per C. D'Aspremont-J. Jaskold Gabszewicz-J. F. Thisse (1979), l'errore di Hotelling è proprio quello di non considerare in termini matematici la strategia attraverso cui un mercante "undercuts the delivered price of the other, and attracts to him the whole market" (p. 1148).
 71. H. Hotelling (1929), p. 58.
 72. L'asserzione centrale del modello è che la "unit quantity of the commodity is consumed in each unit of time in each unit of length of line. The demand is thus at the extreme of inelasticity." H. Hotelling (1929), p. 54.
 73. "In fact, since the demand is inelastic, we may imagine the two alleged competitors to be amicably exploiting the consumers without limit by raising their prices. The increases need not be agreed upon in advance but may proceed by alternate steps, each seller in turn making his price higher than the other's, but not high enough to drive away all business. Thus without a formal agreement the rivals may succeed in making themselves virtually a monopoly." H. Hotelling (1929), pp. 56-57.
 74. H. Hotelling (1929), p. 61.
 75. Cfr. W. L. Smith (1978), p. 1177 e A. C. Darnell (1990), pp. 14-16.
 76. Le modificazioni al modello di Hotelling riguardano sia l'offerta che la domanda. Rispetto all'offerta, A. Robinson (1941) introduce una funzione di costi decrescente che causa l'eliminazione di un'impresa, mentre E. H. Chamberlin (1933) dimostra che la presenza di limiti alle capacità produttive (pp. 226-227) o di tre imprese (pp. 260-262) provoca instabilità. Rispetto alla domanda, A. Smithies (1941) studia gli effetti di una domanda elastica e di costi di trasporto non unitari, A. P. Lerner-H. W. Singer (1937) quelli di un limite superiore al reddito dei compratori.
 77. Una critica analoga proviene anche da A. P. Lerner-H. W. Singer (1937), p. 147, che non propongono però un modello alternativo che ne tenga conto.

78. "In the 1930s the Great Theory was destroyed and not replaced. To the zealous theoreticians who performed it, this work of destruction was unexpected, disturbing, often undesired and regrettable. Sir John Hicks openly declared against imperfect competition, Keynes ignored it. Those who had seen the need to modernize the neo-classical edifice were often bemused by the visible difficulties and dangerous consequences of what they were doing, but they had to wait till the very end of the decade to hear the plain report by Hicks and Triffin; they had levelled the old building to the ground." G. L. S. Shackle (1967), p. 294.
79. Due attenti osservatori della disciplina evidenziano chiaramente questo punto: per Schumpeter, lo studio dell'oligopolio è "so full of inconclusive controversy and uncertainty of results" (prefazione a F. Zeuthen, 1930, p. II); Hicks afferma che "it has to be recognized that a general abandonment of the assumption of perfect competition, a universal adoption of the assumption of monopoly, must have very destructive consequences for economic theory." J. R. Hicks (1939), p. 83.
80. Shackle condivide questa affermazione: "When economic theory elects to bring in imperfect competition and to recognize uncertainty, there is an end of the meaning of general equilibrium. Economics thereafter is the description, piece by piece, of a collection of fragments. These fragments may fit together into a brilliant, arrestingly suggestive mosaic, but they do not compose a pattern of unique, inevitable order. One vital aspect of the process of theoretical innovation is its destructive aspect." G. L. S. Shackle (1967), p. 295.
81. Per Chamberlin, l'errata interpretazione dell'oligopolio fatta dalla teoria neoclassica "is due in part to errors in reasoning. But it is due in much larger part to the actual complexity of an apparently simple hypothesis." E. H. Chamberlin (1933), p. 30.
82. E. H. Chamberlin (1933), pp. 213-214.
83. Tutta la teoria di Chamberlin appare fondata sulla seguente massima, che contrasta col progetto complessivo della teoria dei giochi: "They take whatever business comes their way, and expect others to do likewise-to live and let live" E. H. Chamberlin (1933), p. 105.
84. Cfr. E. H. Chamberlin (1933), p. 48.
85. Mentre nel caso del grande gruppo, Chamberlin suppone la completa indipendenza delle imprese, la sua ipotesi muta nel piccolo gruppo: "This independence must, however, be interpreted with care, for, in the nature of the case, when there are only two or a few sellers, their fortunes are not independent. There can be no actual, or tacit, agreement - that is all. Each is forced by the situation itself to take into account the policy of his rival in determining his own, and this cannot be construed as a 'tacit agreement' between the two." E. H. Chamberlin (1933), p. 31.
86. La curva DD' sostituisce la dd', che è invece indipendente dalle reazioni degli altri.
87. Per Chamberlin le due teorie di mutua dipendenza ignorata sono complementari e la visione di Cournot non viene confutata da Edgeworth. Chamberlin corregge, invece, Edgeworth, affermando che nel suo modello "there is 'an indefinite number of final settlements'. But there is no perpetual oscillation." E. H. Chamberlin (1933), p. 40.
88. Nella prefazione alla seconda edizione di Economics of Imperfect Competition, pubblicata nel 1969, la Robinson scrive: "I did not

- attempt to tackle duopoly and oligopoly and, concentrating on price as the vehicle for competition, I said very little about non-price competition, such as artificial product-differentiation, advertising and sales promotion, which in fact accounts for the greatest part of the wastefulness of imperfect markets. The twin to my book, Chamberlin's Monopolistic Competition, opened up these subjects." in G. R. Feiwel (editor) (1989), p. 20.
89. R. Triffin (1941), p. 48.
 90. R. Triffin (1941), p. 12.
 91. R. Triffin (1941), p. 70.
 92. E' interessante rilevare che Pigou aveva avuto un'intuizione simile prima di Triffin: "The quantity of resources which at any moment it will be more profitable to A to employ in his business depends on the quantity which B is employing, and vice versa. The quantity employed by each, therefore, depends on his judgement of the policy which the other will pursue, and this judgement may be anything according to the mood of each and his expectation of success from a policy of bluff. As in a game of chess, each player's move is related to his reading of the psychology of his opponent and his guess as to that opponent's reply. Hence, the investment of each separately and of two jointly is indeterminate." A. C. Pigou (1924), pp. 237-238.
 93. Triffin (1941), p. 102.
 94. Cfr. G. Debreu-H. Scarf (1963), p. 151.
 95. F. Y. Edgeworth (1881), p. 194
 96. "in the absence of arbitration, the interests of the two adversa pugnancia fronte all along the contract curve." F. Y. Edgeworth (1881), p. 200.
 97. Nel 'campo di concorrenza' di Edgeworth ogni individuo è libero, per ipotesi, di ricontrattare lo scambio con un altro individuo qualsiasi senza il consenso degli altri.
 98. F. Y. Edgeworth (1881), p. 200.
 99. "Questo nostro metodo generale ha il vantaggio di essere altresì applicabile ai casi speciali di concorrenza imperfetta, per i quali le comuni concezioni della domanda e dell'offerta in funzione del prezzo cessano di essere appropriate." F. Y. Edgeworth (1881), p. 224.
 100. F. Y. Edgeworth (1881), p. 235.
 101. Cfr. par. 5.5.
 102. Cfr. A. C. Pigou (1924), cap. III.
 103. Cfr. J. R. Hicks (1932), cap. VII.
 104. F. Zeuthen (1930), pp. 104-135.
 105. Cfr. par. 5.4.
 106. F. Zeuthen (1930), p. 153.
 107. Un recente commento di Harsanyi sul modello di Zeuthen ne sottolinea l'originalità anche rispetto alla successiva analisi di von Neumann e Morgenstern del processo di contrattazione: "Yet even though von Neumann and Morgenstern's theory of games was an essential step toward a strong bargaining theory, their own analysis of two-person bargaining games did not go significantly beyond the weak bargaining theory of neoclassical economics." J. C. Harsanyi (1989), p. 56.
 108. Un dettagliato resoconto di questa letteratura è dato da R. A. Epstein (1967) e da I. Todhunter (1865).
 109. J. von Neumann-O. Morgenstern (1944), p. 87.
 110. "Gamblers can rightfully claim to be the godfathers of probability theory, since they are responsible for provoking the stimulating

- interplay of gambling and mathematics that provided the impetus to the study of probability. For several centuries, games of chance constituted the only concrete field of application for probabilistic method and concepts." R. A. Epstein (1967), p. 10.
111. In un'importante storia dell'analisi economica si coglie, pochi anni dopo la pubblicazione di *Theory of Games*, il legame tra Bernoulli e i suoi successori in termini suggestivi: "The theory of games of chance is on the contrary highly important for many problems of economic logic. If proof were needed, a recent book by Professors Morgenstern and von Neumann would supply it. And the first pointer in this direction still stands in Bernoulli's name. In economics it may take 206 years from a first step to the second—just about the same length of time as in the case of the statistical demand curve" J. A. Schumpeter (1954), p. 305.
 112. Tra gli esempi che confutano il principio di attesa matematica, Bernoulli cita anche quelli di assicurazione contro il rischio di perdere la propria nave da parte di un mercante, le scommesse con valore atteso negativo e il paradosso di S. Pietroburgo (cfr. D. Bernoulli, 1738, pp. 28-30).
 113. Bernoulli non impiega naturalmente gli strumenti dell'analisi marginale. Egli si limita ad analizzare le differenze tra i criteri di decisione di un individuo ricco e di uno povero, arrivando intuitivamente alla conclusione che "all men cannot use the same rule to evaluate the gamble" D. Bernoulli (1738), p. 24.
 114. Bernoulli assume implicitamente che la possibile vincita non possa mutare sostanzialmente la ricchezza posseduta dall'individuo prima della scommessa, come evidenza nel 1954 Savage: "If the consequences f to be considered are all quantities of cash, it is reasonable to suppose that $U(f)$ will change smoothly with changes in f . Therefore, if a person's present wealth is f_0 , and he contemplates various gambles, none of which can greatly change his wealth, the utility function can, for his particular purpose, be approximated by its tangent at f_0 , that is, $U(f)=U(f_0)+(f-f_0)U'(f_0)$, a linear function of f ." L. J. Savage (1954), p. 91.
 115. Lo stesso Daniel Bernoulli attribuisce al matematico Gabriel Cramer la prima soluzione del paradosso di S. Pietroburgo, in una lettera spedita nel 1728 da Cramer al cugino di Daniel, Nicolas Bernoulli. Cramer ipotizza però un limite superiore alle possibilità di vincita e non postula una funzione logaritmica tra utilità e scommessa (cfr. D. Bernoulli, 1738, pp. 33-34).
 116. Per le prime discussioni critiche della teoria di Bernoulli dopo la pubblicazione di *Theory of Games* cfr. M. Allais (1953), pp. 542-543; R. D. Luce-H. Raiffa (1954), pp. 20-21; K. J. Arrow (1951), pp. 420-423.
 117. Cfr. J. A. Schumpeter (1954), p. 304; A. Rapoport-C. Orwant (1962), pp. 1-2.
 118. Cfr. P. S. de Laplace (1814).
 119. Jevons accettò le altre implicazioni della soluzione di Bernoulli, ma ne restrinse la validità al caso del lungo periodo. Marshall ne decretò la rimozione dal patrimonio di idee dell'economista, spiegando le scommesse in base al 'love of gambling' (Cfr. M. Blaug, 1968, pp. 333-334).
 120. Per una descrizione dell'abbandono dell'ipotesi di Bernoulli nell'ottocento, cfr. G. J. Stigler (1950a), pp. 373-377.
 121. Ramsey (1931), anticipando in parte *Theory of Games*, è il primo a riferirsi di nuovo alla teoria di Bernoulli, adattandola alla descrizione del comportamento di un individuo vincolato da certi

postulati. Von Neumann ha però dichiarato di non aver mai letto il libro di Ramsey: "Once von Neumann was asked why he did not refer to the work of Ramsey, which might have been known to someone conversant with the field of logic. He replied that, after Gödel published his papers on undecidability and the incompleteness of logic, he did not read another paper in symbolic logic." H. W. Kuhn-A. W. Tucker (1958), p. 108.

122. Cfr. par. 4.2.
123. James 1st Earl Waldegrave nasce in Francia nel 1684. Si trasferisce intorno al 1721 in Inghilterra, dove diventa membro della House of Lords. Dal 1725 intraprende la carriera diplomatica, che lo riporta prima in Francia, poi a Vienna e infine a Versailles. Muore nel 1741 (cfr. W. J. Baumol-S. M. Goldfeld, editors, 1968, p. 9).
124. Il testo della lettera scritta da Waldegrave il 13 novembre 1713 è riprodotto nella corrispondenza tra Pierre Remond de Montmort e Nicholas Bernoulli, pubblicata nella seconda edizione (1713) dell'Essay d'analyse sur les jeux d'hazard di de Montmort (cfr. prefazione di H. W. Kuhn alla lettera di Waldegrave in W. J. Baumol-S. M. Goldfeld, editors, 1968, p. 7).
125. Pierre Remond de Montmort (1678-1719) è il primo matematico a risolvere il 'matching problem', la probabilità, cioè, che il valore di una carta coincida con il numero che esprime l'ordine in cui essa è estratta; calcola inoltre l'attesa matematica di alcuni giochi di carte (cfr. R. A. Epstein, 1967, p. 5).
126. Cfr. I. Todhunter (1865), pp. 106-107.
127. Questa possibilità gli è preclusa solo se la seconda carta estratta è un Re; in questo caso deve accontentarsi della carta ricevuta dallo scambio.
128. Cfr. prefazione di H. W. Kuhn alla lettera di Waldegrave in J. Baumol-S. M. Goldfeld (editors), 1968, p. 6.
129. Che è data, qualunque siano i valori di c e di d, da:

$$\frac{8484 + 14170}{13.17.25 \times 8} = \frac{2831}{5525} + \frac{3}{5525 \times 4}$$

130. E' ovvio, per la simmetricità del gioco, che le stesse considerazioni possono essere fatte per il giocatore I, quando egli sceglie c=5 e d=3 (cfr. J. Waldegrave, 1713, p. 9).
131. "does not seem in the usual rules of play" J. Waldegrave (1713), p. 7.
132. G. T. Guilbaud è il primo che evidenzia l'importanza della lettera di Waldegrave (cfr. G. Th. Guilbaud, 1960, pp. 172-174).
133. Cfr. N. W. Rives Jr. (1975), p. 554.
134. Cfr. par. 3.4. Un'analisi del concetto di strategia mista si trova anche in R.A. Fisher (1934), che riprende il gioco 'Le Her' mostrando, in maniera apparentemente indipendente da Waldegrave, che con l'estrazione a sorte tra i metodi di gioco "the chances of the game are stabilized at the saddle". Egli non è però cosciente, negli stessi anni in cui Borel ha già pubblicato la sua teoria, delle implicazioni di questa regola.
135. La riscoperta nel 1960 dell'articolo di Steinhaus si deve a Harold W. Kuhn. La traduzione inglese si basa su una copia fotostatica dell'articolo originariamente apparso su una rivista pubblicata dagli studenti dell'Università e della Scuola Politecnica di Lwow, che faceva parte nel 1925 della Repubblica Ucraina (cfr. il commento di Kuhn a H. Steinhaus, 1925, pp. 105 e 108).

136. Steinhaus esclude, "to simplify our considerations", il caso di un pareggio (cfr. H. Steinhaus, 1925, p. 106). Questa semplificazione è innocua nella misura in cui la regola del pareggio rende gli scacchi un gioco a lunghezza finita.
137. H. Steinhaus (1925), p. 106.
138. H. Steinhaus (1925), p. 106.
139. H. Steinhaus (1925), p. 106.
140. Nell'appendice alla ristampa del 1960 del suo articolo, Steinhaus scrive: "I was well aware that the minimax time of the pursuer is longer or equal the the maximin time of the pursued, but I did not know whether they are equal in all similar games" (cfr. H. Steinhaus, 1925, p. 108). Egli riteneva perciò necessario operare una distinzione tra i giochi 'chiusi', per i quali vale questa uguaglianza, e quelli 'aperti', in cui tale uguaglianza non si verifica.
141. Cfr. E. Zermelo (1913), pp. 501-504.
142. Nella misura in cui le regole che impongono il pareggio rendono gli scacchi un gioco a lunghezza finita.
143. Le relazioni tra l'opera di von Neumann e quella di Zermelo sono provate da un articolo di D. König del 1927 ("Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche", Acta Sci. Math. Szeged, vol.3, 1927, pp. 121-130), al quale von Neumann suggerisce un metodo grafico per rappresentare la finitezza di un gioco che comprende una 'stop rule'. Un'altra conferma in questo senso proviene da un articolo di L. Kalmar ("Zur Theorie der abstrakten Spiele", Acta Sci. Math. Szeged, vol. 4, 1928-1929, pp. 65-85), il quale sostiene che von Neumann riesce a dimostrare il teorema del minimax in strategie pure per un gioco ad informazione perfetta contemporaneamente a Zermelo (cfr. H. W. Kuhn-A. W. Tucker, 1958, p. 105).
144. "The domain of Zermelo's theorem - two-person zero-sum games of perfect information - seems at first rather limited; but the theorem has reverberated through the decades, creating one of the main strands of game theoretic thought." R. J. Aumann (1987), p. 461.
145. Émile Borel nasce nel 1871 a Saint-Affrique nella Francia sud-centrale da un padre pastore protestante. Tra il 1910 e il 1920 è assistente direttore dell'École Normale Supérieure of Paris. Nel 1921 entra a fare parte dell'Accademia Francese delle Scienze. Nel 1925 è ministro della marina del governo francese. Muore nel 1956 (cfr. E. E. Kramer, 1982, pp. 248-249).
146. Cfr. M. Fréchet (1953) e (1953a).
147. "While this paper was put into its final form, I learned of the note of E. Borel in the Comptes Rendus of Jan. 10, 1927 ("Sur les systèmes de formes linéaires...et la théorie du jeu", pp. 52-55). Borel formulates the question of bilinear forms for a symmetric two-person game and states that no examples for $\text{Max Min} < \text{Min Max}$ are known. Our result above answers his question." J. von Neumann (1928), p. 25.
148. Fréchet offre nel suo articolo un'elegante definizione di questo termine, mutuata da E. Legouvé: "Je nomme initiateurs ces êtres privilégiés, ces creatures magnétiques qui font vibrer en nous des cordes jusque-là muettes, ces éveilleurs d'âmes." M. Fréchet (1953), p. 95.
149. Cfr. E. Borel (1909).

150. Borel definisce simmetrico un gioco in cui nessun giocatore ha un vantaggio sull'altro: se i due giocatori adottano lo stesso metodo hanno le stesse probabilità di vittoria.
151. E. Borel (1921), p. 1304.
152. "Pour leur solution pratique, l'esprit géométrique doit être aidé par l'esprit de finesse. Le suel conseil que le géométrie puisse donner, en l'absence de tout reinsegnement psychologique, au jouer A dont l'adversaire B cherche à utiliser les remarques précédentes, c'est de varier son jeu de telle manière que les probabilités attribuables par un observateur extérieur à ses diverses manières de jouer ne soient jamais définies; la fonction $q(x,y)$ doit donc varier à chaque instant, et varier sans suivre aucune loi; on peut douter qu'il soit possible d'indiquer un moyen effectif et sûr de mettre en action un tel conseil; il semble que, pour le suivre à la lettre, il foudrait une incohérence totale d'esprit, alliée, bien entendu, à l'intelligence nécessaire pour éliminer les méthodes que nous avons qualifiées de mauvaises." E. Borel (1921), pp. 1307-1308.
153. Cfr. E. Borel (1921) e (1924).
154. E. Borel (1921), p. 1306. Nella traduzione inglese del 1953, il numero 3 diventa un 7, probabilmente per un refuso (cfr. E. Borel, 1921, traduz. ingl., p. 98).
155. E. Borel (1926), p. 926.
156. Cfr. E. Borel (1926), p. 926.
157. Il problema coincide con l'uguaglianza

$$\max_x \min_y s = \min_y \max_x s$$

risolta nel 1928 da von Neumann.

158. E. Borel (1921), p. 1307.
159. Cfr. E. Borel (1924), p. 204.
160. Cfr. E. Borel (1938), p. 86.
161. "It should be pointed out that Borel's approach to game theory was mainly a psychological one, though Borel himself considered its application to economic phenomena"; ciò consente di affermare che "the mathematicians who contributed to building game theory were aware of economy as a field of interpretation for the theory they initiated" C. Schmidt (1990), p. 591.
162. Von Neumann aggiunge polemicamente: "It is common and tempting fallacy to view the later steps in a mathematical evolution as much more obvious and cogent after the fact they were beforehand". J. von Neumann (1953), p. 125.
163. Sebbene Aumann dedichi solo un cenno a Borel nella sua voce "Game Theory" sul New Palgrave (cfr R. J. Aumann, 1987, p. 462), la storiografia più recente ha rivalutato il contributo del matematico francese: "His achievement in formulating mixed strategies, and finding minimax solutions of particular cases was a substantial contribution" (R. W. Dimand-M. A. Dimand, 1990, pp. 15-16). Ed ancora: "One can hardly question either the legitimacy or the significance of the Borel notes, not to mention the influence they may have had on the work of von Neumann." (N. W. Rives Jr., 1975, p. 560).
164. Nell'articolo del 1928, gli unici riferimenti di von Neumann alle applicazioni della teoria dei giochi sono a pagina 17, dove egli afferma che "all social happenings" sono configurabili come giochi strategici, e nella nota 2 di pagina 13, dove scrive che l'economia

- classica si interessava solo a "how is the absolutely selfish 'homo economicus' going to act under given external circumstances." J. von Neumann (1928).
165. O. Morgenstern (1976), p. 810.
 166. Cfr. E. Nagel-J. R. Newman (1958), pp. 19-43, e M. Kline (1980), cap. XI.
 167. P. Tani (1987), p. 91.
 168. I primi tentativi di costruire modelli assiomatici in economia si devono a Frisch nel 1926 e ad Alt nel 1936 (cfr. O. Morgenstern, 1972, p. 1165), ma è necessario attendere la teoria dell'utilità di von Neumann e Morgenstern (1944) per avere una realizzazione compiuta.
 169. A. C. Darnell (1990), p. 4.
 170. "Although there were individual exceptions, it was not uncommon for an economist to eschew, completely, any training in mathematics. My colleague, Martin Bronfenbrenner, a graduate student at Chicago beginning in the mid-1930s, took some calculus courses while a graduate student and recalls that such training was not required. (...) The times were hostile to mathematical economics" E. R. Weintraub (1983), p. 18.
 171. "The AMS was more of a forum for mathematical economics at this time than was the American Economic Association (AEA)" A. C. Darnell (1990), p. 5. Tra gli altri, Hotelling stesso e Griffith Evans, che nel 1930 pubblica un testo pionieristico di economia matematica, sono membri dell'American Mathematical Society.
 172. Cfr. H. G. Grubel-L. A. Boland (1986), p. 425.
 173. L'Econometric Society nasce, per iniziativa di Ragnar Frisch, Charles F. Roos e Irving Fisher, nel dicembre 1930 a Cleveland e nel settembre 1931 a Losanna.
 174. Cfr. par. 5.1.
 175. M. S. Morgan (1990), p. 2.
 176. Jansci (John) von Neumann nasce nel 1903 a Budapest. Nel 1921 si iscrive all'Università di Budapest, ma si trasferisce subito dopo in quella di Berlino, dove segue i corsi tenuti da David Hilbert a Gottingen. Nel 1923 lascia Berlino per Zurigo, dove ottiene la laurea in Ingegneria Chimica nel 1925. Nel 1927 è 'privatdozent' a Berlino e nel 1929 assume lo stesso incarico all'Università di Amburgo. Nel 1931 ottiene la 'professorship' a Princeton, università dove, nel 1933, entra a far parte dell'Institute for Advanced Study.
 177. R. J. Aumann (1987), p. 462.
 178. Con $n=0$ il gioco non ha significato e con $n=1$ non si ha interazione strategica.
 179. Il gioco 'Paper, Scissor, Stone' (dove 'paper' è 1, 'scissor' è 2 e 'stone' è 3) è descrivibile come un rapporto di dominanza ciclica tra tre elementi : $1>2$, $2>3$, $3>1$ ("Papers covers the stone, scissors cut the paper, stone grinds the scissors" J. von Neumann, 1928, p. 22).
 180. Il giocatore 2 sceglie il numero 1 se il giocatore 1 sceglie il numero 2, il numero 2 se il giocatore 1 sceglie 3, e il numero 3 se il giocatore 3 sceglie 1.
 181. "he is protected against his adversary 'finding him out'; for, if, e.g., $e_1 = e_2 = \frac{1}{2}$, nobody (not even he himself) can predict whether he is going to choose 1 or 2!" J. von Neumann (1928), p. 23.
 182. "The proof of our theorem, given in the first paper, made a rather involved use of some topology and of functional calculus" J. von Neumann-O. Morgenstern (1944), p. 154, nota 1.

183. L'introduzione di questo strumento in economia è attribuibile a von Neumann, che lo impiega anche nell'articolo del 1938 sulla crescita: "It was stated that VN was the first to introduce convex mathematical structure into economics, and that, in his growth model, he gave it a consistent and convincing economic interpretation. His mathematical tools, as well as his proof theory, gave rise to at least two rather divergent schools of economic analysis: the neoclassical schools, and the rigorously reformulated (Ricardian and Marxian) classical school. Both schools were revolutionated by the use of convex analysis." M. Dore (1989), p. 93.
184. Il teorema applicato è, in termini generali, il seguente: sia $f(x,y)$ una funzione continua $f: X \rightarrow R$ definita sullo spazio $X \times Y$, dove X e Y sono sottoinsiemi compatti convessi non vuoti rispettivamente degli spazi A_m e A_n . Se $f(x,y)$ è quasi convessa in y per ogni x appartenente a X e è quasi concava in x per ogni y appartenente a Y , allora si ha che
- $$\max_x \min_y f(x,y) = \min_x \max_y f(x,y).$$
185. Per Borel, questo è il risultato garantibile attraverso l'"esprit géométrique" (cfr. par. 3.4). Von Neumann non mette in luce con la stessa enfasi questa differenza.
186. "The solution shows immediately that three-person game is essentially different from a game between two persons. The actual game strategy of the individual player recedes into the background. It does not offer anything new since the formation of the coalitions (which is bound to take place) makes the play a two-person game. But the value of a play for the player does not only depend on the rules of the game. Rather, it is a question - at least as soon as $D > 0$ - of which of the three equally possible coalitions S_1, S_2 ; S_1, S_3 ; S_2, S_3 has been formed. A new element enters, which is entirely foreign to the stereotyped and well-balanced two-person game: struggle." J. von Neumann (1928), p. 38.
187. Cfr. par. 4.3.
188. Un altro elemento che anticipa Theory of Games è un'applicazione della teoria di von Neumann al poker, di cui viene preannunciata la pubblicazione nell'articolo del 1928 (cfr. J. von Neumann, 1928, p. 42). Nel 1953 questo lavoro viene edito a cura di Gillies e Mayberry, che traducono in inglese una nota scritta nel 1929 da von Neumann in tedesco (cfr. D. B. Gillies-J. P. Mayberry-J. von Neumann, 1953).
189. Sui legami tra questa parte del lavoro di von Neumann e la teoria dei giochi cfr. B. Ingrao-G. Israel (1987), p. 173-175 e P. Mirowski (1990), pp. 8-12.
190. Cfr. G. L. Thompson (1989a), p. 242.
191. Cfr. K. Gödel (1931).
192. Cfr. H. W. Kuhn-A. W. Tucker (1958), p. 108.
193. "My personal opinion, which is shared by many others, is that Gödel has shown that Hilbert's program is essentially hopeless" J. von Neumann (1961), p. 6.
194. "La prova di Gödel non dovrebbe essere interpretata come un invito a disperare o come una scusante per coloro che vendono misteri. La scoperta che vi sono delle verità aritmetiche che non possono essere formalmente dimostrate non significa che vi siano delle verità che non riusciremo mai a conoscere, o che una sorta di intuizione 'mistica' (radicalmente diversa, nel genere e nell'autorità, da quella generalmente presente nei progressi

- concettuali) debba sostituire le prove rigorose. Non significa, come un autore recentemente ha preteso, che vi siano dei 'limiti ineluttabili alla ragione umana'. Significa invece che le risorse dell'intelletto umano non sono state, né possono essere, formalizzate completamente, e che sempre esistono dei nuovi principi di dimostrazione che attendono di essere inventati o scoperti." E. Nagel-J. R. Newman (1958), pp. 107-108.
195. Questa interpretazione si deve a Mirowski, per il quale von Neumann comprende che "the solution was turn back to 'empirical' phenomenon for inspiration: in this particular instance, that meant attempting to model the brain directly in order to gain insight the knotty conundrums of logic. One observes this in almost all the topics von Neumann took up in the last fifteen or so years of his life: probabilistic logics; the theory of automata; the design of computers; direct models of the neurons of the brain, and, of course, game theory." P. Mirowski (1990), p. 14. Secondo Mirowski, lo stesso percorso ideale venne seguito contemporaneamente anche da Alan Turing, che dopo la prova di Gödel si interessa alla teoria degli automata (cfr. P. Mirowski, 1990, pp. 16-19 e P. Mirowski, 1990a, pp. 10-16).
196. "If we had to name the most important immediate forerunner of modern mathematical economics, we would not hesitate to choose John von Neumann for his model of economic growth presented in his 1937 paper. Not only did this paper provide the first explicit nonaggregate model in capital and growth theory, but also it presented (1) the first explicitly activity analysis model of production and (2) the first abstract model of a competitive economy (...), which lead to the models of the 1950s." A. Takayama (1985), p. 486. Giudizi simili provengono, tra gli altri, da K. J. Arrow (1989), S. Chakravarty (1989), M. Dore (1989) e (1989a), H. Brems (1986), E. R. Weintraub (1983).
197. Le ipotesi di von Neumann sono le seguenti: ogni bene è prodotto o come input o come output in ogni processo di produzione, i rendimenti di scala sono costanti, c'è libera disponibilità dei fattori naturali di produzione, è impossibile il 'paese della Cuccagna', ogni bene è producibile e ogni processo di produzione richiede esattamente un periodo di tempo.
198. Nella formulazione di von Neumann, X rappresenta l'intensità con cui vengono attivati i processi produttivi e Y i prezzi dei beni.
199. Dore dimostra nel 1989 che il modello di crescita di von Neumann è interpretabile anche globalmente in funzione del teorema del minimax (cfr. M. Dore, 1989a).
200. Morgenstern nasce a Goerlitz, in Silesia, nel 1902. Nel 1925 ottiene il dottorato all'università di Vienna, dove entra a far parte della scuola di Karl Menger e di Böhm-Bawerk. Nel 1929 diventa 'privatdozent' e nel 1935 professore dell'università di Vienna. Dal 1931 al 1938 è direttore dell'Istituto austriaco per la ricerca sul ciclo economico, editore della rivista Zeitschrift für Nationalökonomie, consigliere alla banca nazionale austriaca e membro della Lega della Nazioni. Nel 1938 emigra negli Stati Uniti ed entra a fare parte dell'Institute for Advanced Studies dell'Università di Princeton, dove incontra John von Neumann.
201. "Without Oskar Morgenstern we would not have the theory of games as we know it today. That does not mean that someone else would not have taken up work on von Neumann's problem, but it does mean that game theory would probably not have been introduced into the social sciences until many many years later. Despite von Neumann's

- technical powers, the course of economics was changed by Morgenstern since he focused attention on a mode of analysis that has only recently come to be the dominant mode for all economics. The theory of games needed a non-neoclassical leader since it represented a fundamental break in economic thinking that would have been ruined if placed in the hands of a more conventional mind." A. Schotter (1991), p. 23.
202. Cfr. O. Morgenstern (1928).
 203. Nell'esempio costruito da Morgenstern Sherlock Holmes cerca di sfuggire a Moriarty. Le decisioni di entrambi sono basate sulla stima di ciò che farà l'altro, cosicché ad ogni possibile strategia è associato un esito incerto dell'inseguimento (cfr. O. Morgenstern, 1928, p. 98).
 204. Cfr. O. Morgenstern (1935).
 205. Morgenstern discute le modalità dell'introduzione del tempo nell'analisi economica in un altro articolo del 1935, partendo dalla considerazione che l'ipotesi di Walras di una velocità di reazione infinita in tutti i processi produttivi è irrealistica. Morgenstern analizza invece direttamente i processi di allocazione e di adattamento dell'individuo nel tempo (cfr. O. Morgenstern, 1935a).
 206. "The individual exercising foresight must thus not only know exactly the influence of his own transactions on prices but also the influence of every other individual, and of his own future behavior on that of the others, especially of those relevant for him personally." O. Morgenstern (1935), p. 173.
 207. "Always, there is exhibited an endless chain of reciprocally conjectural reactions and counter-reactions. This chain can never be broken by an act of knowledge but always only through an arbitrary act - a resolution. (...) Unlimited foresight and economic equilibrium are thus irreconcilable with one another." O. Morgenstern (1935), p. 174.
 208. L'opinione di Schotter è che quell'articolo è "the first statement of the rational expectations problem" (cfr. A. Schotter, 1991, p. 4). Morgenstern sembra anticipare la soluzione offerta da Lucas con la teoria delle aspettative razionali, ma la rigetta perché, a suo avviso, l'economia non è una scienza che ammette predizioni unanimi (cfr. A. Schotter, 1991, p. 16).
 209. Cfr. O. Morgenstern (1936).
 210. Per una valutazione delle dimensioni di questa migrazione cfr. E. Craver (1986) e par. 5.1.
 211. O. Morgenstern (1976), pp. 806-807.
 212. O. Morgenstern (1976), pp. 807.
 213. Sebbene von Neumann incoraggi Morgenstern a scrivere questo articolo, il cui titolo avrebbe dovuto essere "Zeitmoment", nel periodo che va dall'ottobre 1939 al luglio 1941 egli si limita a fare commenti sporadici senza partecipare attivamente alla sua composizione. Ciò è testimoniato dal diario di Morgenstern, in cui, per esempio, si legge: "On November 8: 'Yesterday I showed him the contract curve. It has a bearing on his games, namely because it also matters who goes first.'" (in P. Mirowski, 1990, p. 27).
 214. O. Morgenstern (1976), p. 808.
 215. "What von Neumann and I have done was simply to straighten out some issues that were not resolved at the time of our writing. We needed a number for the payoff matrices in game theory. We were also aware of the debate regarding ordinal and cardinal utilities. Instead of merely postulating the existence of a number for the purposes of

- game theory, which we easily could have done, we decided that we could obtain one by looking at the basic fact of uncertainty and it took very little time to formulate our axioms and give the necessary motivation." O. Morgenstern (1976a), pp. 68-69.
216. "It was largely my doing that this utility theory was developed" O. Morgenstern (1976), p. 809.
217. J. von Neumann-O. Morgenstern (1944), p. 1.
218. "Johnny [von Neumann] read my paper on Hicks carefully and was in full agreement with what I said." O. Morgenstern (1976), p. 810. Il distacco di von Neumann dall'economia neoclassica è ancora più netto di quello dello stesso Morgenstern. Quando quest'ultimo gli propone di recensire le Foundations di Paul Samuelson, von Neumann oppone un rifiuto: "You know, Oskar, if these books are unheated sometime a few hundred years hence, people will not believe that they were written in our time. Rather they will think that they are about contemporary with Newton, so primitive is their mathematics." O. Morgenstern (1976), p. 810.
219. "the reader will not be so very delightful in view of the wholly unjustified difficulties which the book offers; it is among the most unreadable works that have ever been published on economic theory." O. Morgenstern (1941), p. 186.
220. Per Morgenstern i primi autori che rivelano questo errore sono J. von Neumann (1938) e A. Wald (1936). Ma "la prima sistematica segnalazione dell'insufficienza del metodo del 'contare equazioni e le incognite' sembra quella presentata dal matematico tedesco Remak, nel 1929" P. Tani (1987), p. 78.
221. "The most difficult item - and yet under no circumstances to be excluded from even the most severely simplified model - is presented by the interlocking of plans due to actual or assumed knowledge of other plans." O. Morgenstern (1941), p. 197.
222. Cfr. par. 3.6.
223. O. Morgenstern (1941), p. 193.
224. J. von Neumann-O. Morgenstern (1944), p. 7.
225. Per von Neumann e Morgenstern, la matematica è stata usata in economia "perhaps even in an exaggerated manner. In any case its use has not been highly successful. This is contrary to what one observes in other sciences" J. von Neumann-O. Morgenstern (1944), p. 3.
226. J. von Neumann-O. Morgenstern (1944), p. 7.
227. "The field covered in this book is very limited, and we approach it in the sense of modesty. We do not worry at all if the results of our study conform with views gained recently or held for a long time, for what is important is the gradual development of a theory, based on a careful analysis of the ordinary everyday interpretation of economic facts. This preliminar stage is necessarily heuristic, i.e. the phase of transition from unmathematical plausibility considerations to the formal procedure of mathematics." J. von Neumann-O. Morgenstern (1944), p. 7.
228. Cfr. par. 4.3.
229. O. Morgenstern (1949), p. 25.
230. "That it is possible to describe and discuss mathematically human actions in which the main emphasis lies on the psychological side. In the present case the psychological element was brought in by the necessity of analyzing decisions, the information on the basis of which are taken, and the interrelatedness of such sets of information (at the various moves) with each other. This interrelatedness originates in the connection of the various sets

- of information in time, causation, and by the speculative hypotheses of the players concerning each other." J. von Neumann-O. Morgenstern (1944), p. 77.
231. Nel pregevole *La mano invisibile* di Bruna Ingrao e Giorgio Israel si attribuisce a von Neumann questa evoluzione: "Von Neumann è anche il principale attore di quel processo cui abbiamo sommariamente accennato e che porta a una profonda trasformazione della matematica: dalla teoria delle funzioni individuali, dicevamo, si passa allo studio della 'collettività' di funzioni (o spazi funzionali), dall'analisi classica costruita sulle equazioni differenziali all'analisi funzionale astratta, le cui tecniche si rifanno soprattutto all'algebra e ad una nuova branca della geometria moderna, la topologia. La matematica del tempo, nata dalla rivoluzione newtoniana e sviluppata in simbiosi col calcolo infinitesimale classico, subisce una sconfitta ad opera di una matematica statica e atemporale" B. Ingrao-G. Israel (1987), p. 175.
232. La teoria della probabilità ha un ruolo secondario nell'intera economia ottocentesca (per un'analisi a più voci cfr. L. Krüger-L. J. Daston-M. Heidelberger, editors, 1987; in particolare M. S. Morgan, 1987 e C. Ménard, 1987). E' singolare come lo stesso Cournot scriva nella prefazione alle *Recherches* di voler fondare la sua analisi sulla teoria della probabilità, ma non la impieghi poi che raramente (cfr. Cournot, 1838).
233. "Theory of Games was a symbol of the beginning of a golden age. I must be more precise. (...) I meant that there was in the book of von Neumann and Morgenstern a reformulation of economic theory, that new mathematical tools, in particular convex analysis, were introduced, that mathematical rigor was adhered to, that the theory of games provided in many ways a powerful intellectual stimulus" G. Debreu (1987), pp. 251-252. Ed ancora: "Probably more important for economics was the work's programmatic impact. Its endorsement of formal methods, and its use of algebra and convexity theory rather than calculus, contributed significantly to both the rapid growth and the nature of economic theory during this very productive period." J. Eatwell-M. Milgate-P. Newman (editors) (1989), p. XII.
234. Come è noto, in base all'individualismo metodologico il funzionamento del sistema economico facendo riferimento al comportamento razionale del singolo agente economico. Questa assunzione caratterizza anche le scuole economiche di ispirazione neoclassica che arrivano però a conclusioni diverse rispetto alla scuola austriaca (sull'argomento cfr. F. Donzelli, 1986 e 1988).
235. J. von Neumann-O. Morgenstern (1944), p. 9.
236. D. Bernoulli (1738), p. 24.
237. E' interessante rilevare che, sviluppando il lavoro di Lange, Zeuthen prende in considerazione lo stesso tipo di soluzione alcuni anni prima di von Neumann e Morgenstern. Per rendere 'numerica' l'utilità possono, secondo Zeuthen, essere percorse due strade: "Such a choice may appear either where the same will control several, non-simultaneous consumptions, or where several (uncertain) possibilities regarding the total consumption in the same period are weighed against each other." A suo giudizio, nel secondo caso esistono però troppi elementi 'disturbing' per poter isolare un singolo atto di scelta. Ma più avanti, facendo riferimento al suo modello di contrattazione, Zeuthen aggiunge: "The use of probabilities as a measure in a sphere where weighing and measuring are otherwise impossible corresponds to a certain

- extent to my treatment of the 'indeterminate wages problem', in cases where fully organised employers and fully organised workers stand face to face." F. Zeuthen (1937), pp. 237-238.
238. Cfr. F. H. Knight (1921).
239. La mancata pubblicazione nel 1944 della dimostrazione matematica fu decisa da von Neumann, che riteneva ancora necessario analizzare in dettaglio tutte le possibili applicazioni della teoria. Le pressioni di Morgenstern ("who found that economists were not convinced that a rigorous proof could be given" cfr. H. W. Kuhn-A. W. Tucker, 1958, p. 108) portarono alla sua inclusione nella seconda edizione del libro, uscita nel 1947. A giudizio dei suoi stessi autori, essa restava comunque "esthetically not quite satisfactory" (J. von Neumann-O. Morgenstern, 1944, p. 618). Una delle prime versioni semplificate, fedele all'originale, è quella di Savage (cfr. L. J. Savage, 1954, pp. 73-75).
240. Per una discussione su questo punto, cfr. L. J. Savage (1954), pp. 100-104 e M. Allais (1953).
241. Cfr. M. Hausner (1954).
242. Nel 1952, Malinvaud dimostra che von Neumann e Morgenstern assumono implicitamente anche un altro assioma, quello di 'indipendenza forte', definito per la prima volta da Samuelson nel 1952 (cfr. E. Malinvaud, 1952).
243. Se u è una funzione di utilità e w_0 e w_1 sono valori costanti (con $w_0 > 0$), allora
- $$u' = w_0 u + w_1$$
- è anch'essa una funzione di utilità.
244. "the main function of the von Neumann-Morgenstern postulates themselves is to put the essential content of Daniel Bernoulli's 'postulate' into a form that is less gratuitous in appearance." L. J. Savage (1954), p. 99.
245. L. J. Savage (1954), p. 97.
246. Cfr. W. Vickrey (1945); M. Friedman-L. J. Savage (1948); J. Marschak (1948) e (1950); W. Baumol (1948) e (1951); K. G. Chacko (1951); A. Alchian (1953); J. C. Harsanyi (1953) e (1955); R. D. Luce (1959).
247. Gli articoli di M. Allais (1953) e D. Ellsberg (1963) rappresentano i contributi più chiari in questa direzione.
248. Cfr. L. J. Savage (1954), pp. 27-50. Una sintetica presentazione di questo approccio è contenuta in D. Kreps (1990a), pp. 100-105.
249. Per ipotesi, il gioco comprende sempre una regola ('stop rule') che determina la fine del gioco.
250. "The graphical representation of the numerous partitions which we had to use to represent a game is not easy. We shall not attempt to treat this matter systematically: even relatively simple games seem to lead to complicated and confusing diagrams, and so the usual advantages of graphical representation do not obtain." J. von Neumann-O. Morgenstern (1944), p. 77.
251. Ma ciò avviene una sola volta in tutto il libro (cfr. J. von Neumann-O. Morgenstern, 1944, p. 78).
252. Cfr. H. W. Kuhn (1950) e (1953) e par. 5.2.
253. "We cannot avoid the assumption that all subjects of the economy under consideration are completely informed about the physical characteristics of the situation in which they operate and are able to perform all statistical, mathematical, ecc., operations which this knowledge makes possible." J. von Neumann-O. Morgenstern (1944), p. 30.
254. Cfr. G. L. Thompson (1953), A. M. Spence (1974), M. Rotschild-J. Stiglitz (1976) e par. 5.2.

255. J. von Neumann-O. Morgenstern (1944), p. 79.
256. Cfr. par. 2.5.
257. R. J. Aumann (1987), p. 460.
258. Ville elabora la sua dimostrazione dopo essere venuto a conoscenza dell'articolo di von Neumann del 1928 (cfr. J. Ville, 1938). Nell'inverno del 1941 Morgenstern scopre casualmente il lavoro di Ville nella biblioteca di Princeton e lo sottopone all'attenzione di von Neumann: "It is curious to think how different much of our mathematical treatment of game theory would have been, had it not been for this winter day walk, spotting Borel's book, opening it, and expecting to find nothing there about games of strategy." (O. Morgenstern, 1976, p. 811).
259. Una matrice quadrata A di ordine n è detta emi-simmetrica se $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni i, j .
260. J. von Neumann-O. Morgenstern (1944), p. 164.
261. J. von Neumann-O. Morgenstern (1944), p. 220.
262. I termini inseriti in '()' indicano una coalizione, quelli inseriti in '(())' specificano i singoli componenti della coalizione. Nel caso descritto, se la coalizione composta da tutti i giocatori è indicata da (I), la coalizione (-S) è costituita dai giocatori che formano l'insieme (I-S).
263. La funzione caratteristica viene definita da von Neumann e Morgenstern un mezzo per 'divide the difficulties'. In effetti essa permette di accantonare le questioni puramente strategiche per concentrarsi su quelle relative alla formazione delle coalizioni. Martin Shubik ha coniato il termine 'c-games' per indicare quei giochi in cui questa semplificazione può essere effettuata senza tralasciare elementi fondamentali della situazione strategica (cfr. M. Shubik, 1982, p. 131).
264. Per la condizione $v(-S) = -v(S)$ imposta alla funzione caratteristica quando si formano solo due coalizioni.
265. Sembra Morgenstern, più che von Neumann, il principale sostenitore di questa indeterminatezza nelle scienze sociali: "For Morgenstern, indeterminacy was not something to run from but rather to embrace. (...) The world is uncertain and social situations interesting only because they contain indeterminacies that many physical situations do not." A. Schotter (1991), pp. 17-18.
266. J. von Neumann-O. Morgenstern (1944), p. 42.
267. J. von Neumann-O. Morgenstern (1944), p. 504.
268. "This fiction proves to be formally similar to another important case: the case in which a (real) person is being socially discriminated against, i.e. excluded in advance from coalitions, though still able to make decisions of his own. Both cases fall under the concept of exploitation." J. Marschak (1946), p. 105.
269. J. von Neumann-O. Morgenstern (1944), p. 541.
270. Nel fondamentale *Games and Decisions* del 1957 Luce e Raiffa, riferendosi a queste critiche della teoria dei giochi a n persone di von Neumann e Morgenstern, scrivono: "We shall not deny that we feel these two groups of criticisms are very serious indeed, and as a consequence we have limited faith in the ability of n -person theory, as it now stands, to deal with the sociological phenomena of coalition formation. At the same time we would urge the social scientist to continue exploring what theory exists." R. D. Luce-H. Raiffa (1957), pp. 191-192.
271. "In spite of their incompleteness, those considerations tended to be so voluminous that it must seem completely hopeless to push this

- casuistic - approach beyond five participants." J. von Neumann-O. Morgenstern (1944), p. 339.
272. Cfr. W. F. Lucas (1968) e (1969).
273. Cfr. H. W. Kuhn-A. W. Tucker (1958), p. 103.
274. Un ampio resoconto dei tentativi fatti in questa direzione è contenuto in un libro curato nel 1975 da Young, il quale, nella sua prefazione, considera ancora lontana una fondazione teorica generale della contrattazione (cfr. O. R. Young, 1975, pp.4-5, 23-27). Di parere diverso è Roth, che in un volume dedicato ai modelli assiomatici di contrattazione difende la validità della linea teorica Zeuthen-Nash-Harsanyi (cfr. A. E. Roth, 1979).
275. Cfr. par. 5.4.
276. O. Morgenstern (1976), p. 805.
277. Nel 1925, Morgenstern si recò a Oxford per discutere direttamente con Edgeworth la teoria della curva dei contratti. In quell'occasione l'economista inglese gli chiese di ripubblicare *Mathematical Physics*, allora fuori edizione (cfr. O. Morgenstern, 1976, p. 805).
278. Cfr. J. von Neumann-O. Morgenstern (1944), p. 542.
279. L'esempio con cui Böhm-Bawerk dimostra la sua teoria delle 'coppie marginali' è un mercato in cui $s=8$; le valutazioni che 8 venditori e 10 compratori danno al possesso del bene sono espresse in termini monetari:

$$u = (100, 110, 150, 170, 200, 215, 250, 260)$$

$$v = (300, 280, 260, 240, 220, 210, 200, 180, 170, 150)$$
L'equilibrio in questo mercato si stabilisce per $t=5$ e $210 < p < 215$:
"Se tutti devono scambiare ad un prezzo di mercato, questo prezzo deve anche essere preso in modo che possa convenire a tutti gli scambisti. E poiché naturalmente ogni prezzo conveniente ai contraenti meno forti a maggior ragione conviene anche a tutti gli scambisti, ma non viceversa, è naturale che le relazioni dell'ultima coppia, alla quale il prezzo deve ancora convenire, servano di norma per l'altezza del prezzo" E. Von Böhm-Bawerk (1889), p. 274.
280. Se lo scambio non avviene, la funzione caratteristica è determinata dalle stesse condizioni del monopolio bilaterale con un unico bene; mentre se lo scambio avviene, le parti possono determinare il numero t di unità scambiate in modo da massimizzare il loro guadagno congiunto.
281. Per il principio dell'utilità marginale decrescente, l'intervallo

$$- \sum_{t \ i=1}^{1 \ t} (u_{s-i+1} - u_{s-i}) \geq p \geq - \sum_{t \ j=1}^{1 \ t} (v_j - v_{j-1})$$
è maggiore di

$$u_{s-t+1} - u_{s-t} \geq p \geq v_t - v_{t-1}$$
che è a sua volta maggiore di

$$\text{Max} (u_{s-t+1} - u_{s-t}, v_{t+1} - v_t) \geq p \geq \text{Min} (u_{s-t} - u_{s-t-1}, v_t - v_{t-1}).$$
282. Un gioco non a somma costante si ottiene con la trasformazione di questa funzione in forma ridotta ponendo:

$$v'((i)) = v((i)) + ai$$
Con il procedimento matematico discusso nel paragrafo precedente si ottiene:

$$v'((1)) = v'((2)) = v'((3)) = - \frac{w - u}{3}$$

$$3v - 2w - u \qquad w - u \qquad 2(w - u)$$

$$v'((1,2)) = \frac{\quad}{3} \quad v'((1,3)) = \frac{\quad}{3} \quad v'((2,3)) = - \frac{\quad}{3}$$

$$v'((1,2,3)) = 0$$

A questa funzione caratteristica è possibile applicare la consueta
 ozione di dominanza.

283. Von Neumann e Morgenstern presentano anche una 'preliminary discussion' di un mercato alla Walras con l venditori e m compratori. Ma la complessità matematica dei giochi con un elevato numero di partecipanti non consente loro di ottenere alcun risultato generale: "We are far from being able to discuss the theory of this game- the market of l sellers and m buyers- exhaustively. We have at present only some fragmentary information on special cases and beyond this only a few surmises concerning wider areas. (...) It would seem premature, however, to discuss this subject before the investigation has penetrated deeper." J. von Neumann-O. Morgenstern (1944), p. 584.
284. Questo pregiudizio viene rafforzato anche dall'iniziale diffidenza creata da una disciplina che eleva le amene tecniche dei giocatori di poker al rango di una scienza come l'economia: "In some ways the name 'Game Theory' is unfortunate, for it suggests that the theory deals with only the socially unimportant conflict of interest found in parlor games, whereas it is for more general than that. Indeed, von Neumann and Morgenstern entitled their now classical book *Theory of Games and Economic Behavior*, presumably to forestall that interpretation, although this does not emphasize the even wider applicability of the theory." R. D. Luce-H. Raiffa (1954), p. 2. E' infatti probabile che, almeno limitatamente agli anni '40 e '50, "the metaphor linking the economy to games was regarded as a rethorical trope unbecoming the dignity of a science like economics" P. Mirowski (1990a), p. 19.
285. Nel 1957, Luce e Raiffa scrivono: "Fortunately, von Neumann and Morgenstern attempted to write their book so that a patient scientist with limited mathematical training could absorb the motivation, the reasoning, and the conclusions of the theory; judging by the attention given it non-mathematical journals, as well as in the mathematical ones, they were not without success in this aim. Only a few very scientific volumes as mathematical as this one have aroused as much interest and general admiration." R. D. Luce-H. Raiffa (1957), p. 3.
286. "Johnny [von Neumann] said to me repeatedly that we ought to publish some further joint papers, and we certainly had ideas of what could and should be done (one on symmetric solutions of general n -person games was distributed as a Rand Research Memorandum). Otherwise, he said, the book would be 'a dead duck'". O. Morgenstern (1976), p. 813.
287. Dai diari di Oskar Morgenstern in P. Mirowski (1990), p. 41.
288. Dai diari di Oskar Morgenstern in P. Mirowski (1990), p. 41.
289. Dopo una seconda conferenza ad Harvard nel marzo del 1946, Morgenstern scrive: "The economists are partially hostile and partially fascinated because the physiscists so strongly and masterfully rule over it." Ad una conferenza tenuta alla fine del 1947, tra gli uditori è presente anche Schumpeter; il relatore ha però l'impressione che egli non comprenda i contenuti della sua esposizione: "It is clear from what he says that Schumpeter has never read the book." E' interessante notare che nel 1954

- Schumpeter, nel capitolo finale della sua *History of Economic Analysis*, si proponga ancora di approfondire *Theory of Games* (cfr. J. A. Schumpeter, 1954, p. 1140). Su un economista matematico come Paul Samuelson, Morgenstern annota nell'ottobre del 1947: "[Johnny] says [Samuelson] has murky ideas about stability. He is no mathematician and one should not ascribe the analysis to him. And even in 30 years he won't absorb game theory." (dai diari di O. Morgenstern in P. Mirowski, 1990, pp. 41-42).
290. O. Morgenstern (1948), (1948a), (1949), (1949a) e (1950).
 291. Il successo editoriale del libro, che provoca la pubblicazione di una seconda edizione nel 1947 e di una terza nel 1953, è dovuto anche ad una recensione, che Morgenstern giudica 'long and generally intelligent' (cfr. O. Morgenstern, 1976, p. 814), apparsa sulla prima pagina di un'edizione domenicale del *New York Times* nel maggio del 1946.
 292. Cfr. L. Hurwicz (1945), A. Wald (1947), J. Mc Donald (1948), (1949) e (1950).
 293. Cfr. A. H. Copeland (1945), J. Marschak (1946), R. Stone (1948), K. G. Chacko (1950) e (1951), K. J. Arrow (1951) e (1951a).
 294. "Insofar as economists in general are familiar with more than the cover of Morgenstern and von Neumann's magnum opus, I venture to suggest, the principal reason is Professor Hurwicz's review article which undertook just such a reformulation of a few leading principles." M. Bronfenbrenner (1948), p. 26.
 295. Il problema principale per il lettore è "its very lenght which some may find a serious obstacle" L. Hurwicz (1945), p. 909.
 296. L. Hurwicz (1945), p. 909.
 297. "A major achievement of the *Theory of Games* is the analysis of the conditions and nature of coalition formation." L. Hurwicz (1945), p. 913.
 298. Cfr. A. Wald (1945), (1945a) e (1947a).
 299. A. Wald (1945), p. 47.
 300. A. Wald (1945), p. 52.
 301. J. McDonald (1950), p. 54.
 302. J. McDonald (1950), p. 87.
 303. J. McDonald (1950), p. 106.
 304. J. Marschak (1946), p. 105.
 305. "Thus, to be an economic man implies being a statistical man" J. Marschak (1946), p. 109.
 306. K. G. Chacko (1950), p. 359.
 307. "Posterity may regard this book as one the major scientific achievements of the first half of the twentieth century. This will undoubtedly be the case if the authors have succeeded in establishing a new exact science-the science of economics." A. H. Copeland (1945), p. 498.
 308. R. Stone (1948), p.186.
 309. "It goes well beyond any other systematic social theorizing in the complexity of its structure and the rigorous nature of its formal logic. Yet it is interesting to note that virtually no mathematics more difficult than algebra is employed although the chains of reasoning are frequently long and complicated" K. J. Arrow (1951a), p. 139.
 310. Cfr. par. 5.6.
 311. "it seems questionable whether they will obtain adequate appreciation from the public. Page after page full of formulae discourage the reader. A nonmathematical summary of the main

- results would have meant an essential improvement without any sacrifice of rigidity." E. J. Gumbel (1945), p. 210.
312. "the von Neumann-Morgenstern analysis has not so far been presented in a form in which economists could find it directly applicable to their problems" W. Fellner (1949), p. 41.
313. Cfr. W. A. Rosenblith (1951).
314. Nella recensione di Stone, apparsa sulla rivista inglese *Economic Journal*, è palese il disagio provocato da un libro che ignora l'intero apparato teorico dell'economia. A giudizio di Stone, le applicazioni economiche di *Theory of Games* "are in line with those given by the ordinary theory, and in some cases may be a little more general although the comparisons do not take account of the work on imperfect competition over the last twenty years. In view of this, it is to be regretted that the authors are in places less than generous to their colleagues who have tackled, not without success, these difficult problems with far less powerful tools." R. Stone (1948), p. 200.
315. Cfr. C. Kaysen (1946) e (1952).
316. Cfr. M. Allais (1953).
317. Ma quest'ultima critica appare male impostata. Lo stesso problema viene discusso in una prospettiva più corretta da Chacko: von Neumann e Morgenstern si limitano a trattare i giochi ad informazione completa in base al loro 'standard of modesty' metodologico, ma la loro teoria può essere estesa a situazioni di incertezza (cfr. K. G. Chacko, 1950, pp. 363-364). La svolta impressa da Harsanyi alla teoria dei giochi ad informazione completa negli anni '60 dimostrerà la ragionevolezza di questa previsione.
318. W. Jaffé (1948), p. 20.
319. I principali sintomi di queste debolezze sono, a suo avviso, l'imprecisione teorica e l'assenza di generalità: "a combination of St. Vitus dance at each extremity with paralysis of the organism as a whole." M. Bronfenbrenner (1948), p. 23.
320. Bronfenbrenner poi aggiunge: "In any case, Professor Morgenstern would do well to reformulate as large as possible a segment of his contribution in simple arithmetical or diagrammatic examples." M. Bronfenbrenner (1948), pp. 25-26.
321. Anche i successivi 'discussant' non si discostano, nella stessa conferenza, da questa linea di giudizio (cfr. H. L. Mc Cracken, 1948; D. Mc Cord Wright, 1948).
322. Nel 1953, Martin Shubik descrive con chiarezza i limiti di commenti di questo tipo: "The few comments made by some economists on game theory show that for the most part the depth and subtlety of the definitions, concepts and framework of game theory have been missed; the type of well defined abstract model striven for is not recognized; and the reasons why this type of model is looked for are missed." M. Shubik (1953a), p. 32.
323. Il pensiero economico francese si occupa della teoria dei giochi anche nell'intero decennio che precede la pubblicazione di *Theory of Games*. Oltre a Borel e Ville, anche René De Possel pubblica nel 1936 una valida introduzione all'articolo del 1928 di von Neumann (cfr. R. De Possel, 1936).
324. L'attenzione ai problemi dell'economia pubblica caratterizza anche alcune recensioni di *Theory of Games*, pubblicate nei paesi scandinavi (cfr. G. Leunbach, 1948; K. Faxen, 1949).
325. Cfr. G. T. Guilbaud (1951) e (1954).
326. Cfr. M. Lagache (1950) e E. Justman (1949).

327. Alberto Bertolino commenta così la condizione post-bellica del pensiero economico italiano: "Poi venne la seconda guerra mondiale, che fermò quasi il respiro degli economisti italiani; mentre la successiva crisi politica e le conseguenze disastrose della guerra stessa determinarono in molti smarrimento, in altri raccoglimento." A. Bertolino (1980), p. 49.
328. Cfr. O. Morgenstern (1951) e F. Di Fenizio (1952). L'opera di diffusione della teoria dei giochi continua su L'industria anche negli anni successivi, con la pubblicazione delle traduzioni di alcuni articoli statunitensi (cfr. L. Hurwicz, 1955; J. Marschak, 1955; G. Tintner, 1957).
329. G. Demaria (1947), p. 662.
330. G. Demaria (1947), p. 662.
331. G. Demaria (1947), p. 668.
332. "Il nuovo metodo, con il suo insieme di nuovi concetti logici e di nuove assunzioni, ci dà risultati teorici più generali e quindi dei più veri metodi tradizionali? Questo, riteniamo, è il vero quesito che importa. Dai rilievi critici fatti in precedenza la risposta non dovrebbe essere dubbia, tanto più se si consideri che il nuovo metodo non si estende né alle situazioni (quattro e più di quattro partecipanti) né al mondo della dinamica. Il gran pericolo della nuova metodologia è di esaurirsi nella trattazione di problemi limitati e nel contempo di esaurire gli sforzi dei ricercatori in tentativi metodologici che sono in gran parte finiti a sé stessi." G. Demaria (1947), p. 670.
333. G. Demaria (1954), p. 6.
334. Per Brambilla, la teoria dei giochi permette "applicazioni che sono numerose e importanti in tutti i campi dall'industria alla guerra, dall'economia alla politica." F. Brambilla (1953), p. 3. In un altro scritto, Brambilla giudica positivamente i primi tentativi di applicare i nuovi metodi: "La teoria dei giochi per la sua stessa struttura è un invito all'impiego dell'analogia. E tale invito è stato raccolto abbondantemente. Ed ha sortito felici effetti perché questo strumento molto delicato è stato finora impiegato da mani esperte, quelle stesse che lo costruirono e lo raffinarono. Ma il pericolo di analogie formali esiste e non va sottovalutato. Quali applicazioni si conoscono? Molte: Strategia militare ed economica, controllo statistico della produzione, teoria dei trasporti e così via." F. Brambilla (1953b), p. 12.
335. F. Brambilla (1953), p. 3.
336. Cfr. F. Brambilla (1953), pp. 3-7 e (1953a), pp. 10-15.
337. Cfr. B. de Finetti (1952), (1952a), (1953), (1955).
338. "E' questa impotenza che dà luogo alle opinioni meno favorevoli circa il ruolo della teoria dei giochi nell'economia. Se però si pensa, al contrario, che tale impossibilità corrisponda alla natura delle cose, e che pertanto ogni conclusione più determinata sarebbe necessariamente illusoria e ingannevole, si può ben sostenere che le conclusioni della teoria dei giochi hanno un valore positivo, e che la loro limitatezza indica effettivamente fino a qual punto e misura i fatti economici non siano determinati che per l'effetto di decisioni accidentali, e che essa dia così il modo di ricercare se vi siano o meno ragioni di supporre o sperare che la situazione che si realizza sia un 'optimum'." B. de Finetti (1955), p. 493.
339. Negli anni '30, "the AEA at this time was a somewhat hostile environment for any economist utilising mathematical methods, and few 'mainstream' economists would have been able either to understand or appreciate the results achieved by the newly emerging

- mathematical economists. An examination of issues of the American Economic Review from this period illustrates the marked lack of published mathematical papers." A. C. Darnell (1990), p. 19. Cfr. par. 3.1.
340. Oltre agli autori di Theory of Games, compaiono nel 'report' della stessa conferenza anche i nomi di Girschick ("Statistics and the Theory of Games"), Paxson ("Recent Developments in the Mathematical Theory of Games"), John W. Tukey ("A problem in strategy") e George B. Dantzig ("Programming in a linear structure") (cfr. Econometric Society, 1949, pp. 63-64).
341. Il paper di Hurwicz è intitolato "A Theory of Stabilizing Business Fluctuations", quello di Oskar Morgenstern "Complementarity and Substitution in the Theory of Games", nel quale si dimostra che la teoria dei giochi può permettere un'analisi più approfondita di quella data dalla della scuola austriaca del problema della complementarità nella teoria del consumo attraverso la nozione complessa di soluzione (cfr. Econometric Society, 1950,).
342. Nell'agosto del 1950, a Boulder, nel Colorado, Drescher discute i "Methods of Solution in Game Theory". Nel settembre dello stesso anno, nel 'meeting' di Harvard, Nash presenta "The Extended Bargaining Problem", che estende il suo fondamentale articolo del 1950 sulla contrattazione introducendo la possibilità per i due giocatori di scambiarsi direttamente minacce e coercizioni (cfr. Econometric Society, 1951). Nel settembre del 1951, a Minneapolis, l'Econometric Society ospita un simposio sulla teoria dei giochi e sui problemi della decisione. Nella prima sessione, presieduta da von Neumann, Olaf Helmer, discutendo su "Open Problems in Game Theory", offre un vero e proprio manifesto per la ricerca futura (cfr. Econometric Society, 1952). Tra gli interventi presentati negli anni successivi, sono di particolare rilievo il 'paper' di Shapley e Shubik del 1952, che estende gli strumenti della teoria dei giochi ad una funzione di utilità ordinale (cfr. Econometric Society, 1953), la dimostrazione dell'esistenza di un equilibrio competitivo di Arrow e Debreu, presentata il 27 dicembre 1952 al 'meeting' di Chicago (cfr. Econometric Society, 1953a), la discussione, nel 1953, di "A Game Theoretical Analysis of Oligopoly" di Martin Shubik (cfr. Econometric Society, 1954) e i tentativi di applicare la teoria dei giochi, presentati tra il 1958 e il 1959 da Willard L. Eastman ("A Solution to the Traveling-Salesman Problem"), James Hannan ("Approximation to Bayes Risk in Repeated Play"), Julian H. Blair ("Aggregation of Preferences") e Lawrence Friedman ("Game Theory in Advertising") (cfr. Econometric Society, 1959 e 1959a).
343. Chicago poteva essere considerata in quegli anni il centro della nazione perché tutti, nel tragitto 'coast-to-coast', cambiavano treno a Chicago ed il treno era il mezzo più usato per questo tipo di viaggio. In una sua memoria su quel periodo, Lawrence R. Klein commenta: "Being in Chicago, the Cowles Commission was at the center of the country in a transportation sense in those days". Lo stesso "John von Neumann used to come through Chicago on regular train trips between Princeton and Los Alamos and always changed trains in Chicago " L. R. Klein, 1987, p. 344.
344. Cfr. G. R. Feiwel (1987), pp. 15-16; B. Ingrao-G. Israel (1987), pp. 245-246; E. Craver (1986).
345. Marschak ricopre questo incarico fino al 1948, quando a sostituirlo viene chiamato Koopmans.
346. Cfr. G. R. Feiwel (1987), pp.18-20.

347. In un report consegnato alla Rockefeller Foundation nel 1946, Marschak scrive: "[Cowles' work is] typical of our effort to express economic hypothesis in the clearest possible and empirically manageable way; and to make maximum possible use of the theory of rational behavior without unduly forcing it upon rational facts. The same desire underlies the work of Hurwicz and Marschak on evaluating von Neumann's new theory of economic behavior." (in P. Mirowski, 1990a, p. 41). Arrow descrive nel 1951 questo programma come la combinazione di un "intensive a priori thinking" e di una "best-fitting structure from that model by appropriate statistical techniques", aggiungendo che "it is the virtue of the Cowles Commission approach to have set forth this process clearly and to have resolved many of the statistical difficulties in the way of its fulfillment." K. J. Arrow (1951a), p. 153.
348. Cfr. L. R. Klein (1987), pp. 342-343 e E. R. Weintraub (1983), pp. 18-20.
349. La Cowles Commission ospita nel maggio del 1945 due conferenze di von Neumann ed, all'inizio del 1949, una serie di seminari sulla teoria dei giochi condotti da Arrow, Girschik, Hurwicz, Marschak, Simon e Savage (cfr. G. R. Feiwel, 1987, pp. 20-21).
350. La Cowles Commission concentra le propria attività sulla programmazione lineare e sull'analisi dell'attività.
351. Cfr. F. Kaplan (1983), pp. 50-52.
352. Le speranze assegnate a questo metodo di ricerca dallo Stato americano sono tali da consentire affermazioni di questo tipo: "A young scientist attached to the Air Forces said recently of its military application, «We hope it will work, just as we hoped in 1942 that the atomic bomb would work.»" J. Mc Donald (1950), p. 17.
353. K. J. Arrow (1987), p. 647.
354. Nella biografia di Arrow, Feiwel descrive così il periodo trascorso presso la RAND: "Arrow perceived it as an avant-gard, imaginative, and exciting (if somewhat eccentric and turbulent), but, above all, an intellect-stirring group of interdisciplinary research workers. (...) The summers were particularly exciting, for this is when the visiting academics (including our protagonist) converged on Rand 'en masse'. The atmosphere was freewheeling; it exuded enthusiasm and exuberance." G. R. Feiwel (1987), p. 22. Nella storia della RAND Corporation, scritta da Kaplan, si trova un'ulteriore conferma del particolare 'clima' intellettuale che la caratterizza: "It was freewheeling, almost anarchic, virtually without hierarchy or separation among disciplines" F. Kaplan (1983), p. 54.
355. Il documento è contrassegnato dalla sigla Project Rand D-558 ed è stato vincolato al segreto militare fino al 1955 (cfr. M. Dresher-L. S. Shapley, 1949).
356. Cfr. P. Mirowski (1990a), S. Schweber (1988) e D. McKenzie-G. Spinardi (1981).
357. Oltre alla RAND, nel periodo post-bellico l'esercito statunitense può contare su altri cinque organismi di ricerca, tutti legati in qualche modo alla teoria dei giochi: l'Applied Mathematics Panel (AMP), che comprende lo Statistical Research Group della Columbia University al quale collabora nei primi anni della sua carriera Arrow, l'Office of Naval Research (ONR) di Stanford, che finanzia un ampio numero di pubblicazioni sulla teoria dei giochi, tra cui Games and Decisions di Luce e Raiffa, l'Anti-Submarine Warfare Operations Research Group (ASWORG), da cui nasce l'Operations Research Group) e, infine, l'Army's Eisenhower Advanced Study Group (cfr. P. Mirowski, 1990a, p. 20; J. Mc Donald, 1950, pp. 120-125).

358. Cfr. P. Forman (1987), p. 153.
359. La testimonianza che Richard Bellman offre su quel periodo nella sua autobiografia è particolarmente esplicita: "I was horrified to see the genteel poverty in which many faculty people lived. Here were people who had devoted over twenty years to training and they made less than a checker in a supermarket." R. Bellman (1984), p. 184.
360. Cfr. C. Tompkin (1950), M. Shiffman (1953), O. G. Haywood Jr. (1954), J. R. Isbell-W. H. Marlow (1956), L. E. Zachrisson (1957), L. E. Dubins (1957), D. R. Fulkerson-S. M. Johnson (1957), J. K. Hale-H. H. Wicke (1957), R. Restrepo (1957). Il lavoro di Haywood Jr è quello più interessante da un punto di vista applicativo: egli analizza due battaglie della II guerra mondiale, mostrando che la teoria dei giochi permette una valutazione dei rischi di un conflitto nelle situazioni in cui un comandante, deviando dai principi correntemente usati nella dottrina militare, basa le sue decisioni non sulla forza militare del nemico, ma su una stima delle sue intenzioni.
361. F. Kaplan (1983), pp. 56 e 64.
362. Cfr. L. S. Shapley-M. Shubik (1954), che applica il 'valore' di Shapley (cfr. par. 5.2) alla valutazione della forza di una coalizione di voto in un sistema di elezione democratico.
363. Cfr. D. Lerner-H. D. Lasswell (editors) (1951), D. Easton (1953), M. Shubik (editor) (1954), K. W. Deutsch (1954), R. C. Snyder (1955), R. D. Luce-A. Rogow (1956), R. D. Luce-H. Raiffa (1957), pp. 253-258, M. Deutsch (1958). L'introduzione della teoria dei giochi nella scienza della politica è oggetto di una recente ricostruzione da parte di uno dei suoi protagonisti (cfr. W. H. Riker, 1990).
364. Cfr. J. Bernard (1954), T. C. Schelling (1958) e (1959). Un'ampio resoconto dell'importanza della teoria dei giochi per la sociologia e lo studio delle istituzioni sociali è contenuto in A. Schotter (1981).
365. Cfr. M. Lagache (1950), W. A. Rosenblith (1951), R. B. Braithwaite (1955), J. G. Kemeny-G. L. Thompson (1957), A. Rapoport (1959)
366. R. D. Luce-H. Raiffa (1957), p. 3.
367. H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors) (1950), p. XII.
368. H. W. Kuhn-A. W. Tucker (editors) (1950), p. XII.
369. Nel suo primo articolo del 1950, Kuhn non presenta esempi grafici e si limita a semplificare il modello assiomatico di von Neumann e Morgenstern (cfr. H. W. Kuhn, 1950). La prima rappresentazione grafica viene presentata nell'articolo del 1953 (cfr. H. W. Kuhn, 1953, p. 212), nel quale Kuhn scrive: "The use of a geometrical model reduces the amount of set theoretical equipment necessary and clarifies the delicate problem of information" H. W. Kuhn, 1953, p. 193.
370. L'ipotesi assunta da Kuhn è che vi sia un ordine temporale, esista cioè un unico percorso che collega un vertice iniziale con uno degli altri vertici del gioco.
371. Cfr. H. W. Kuhn (1950) e (1953), G. L. Thompson (1953).
372. Cfr. D. Fudenberg-J. Tirole (1991), pp. 81-82.
373. Cfr. G. L. Thompson (1953) e (1953a).
374. Cfr. W. D. Krentel-J. C. C. Mc Kinsey-W. V. Quine (1951), F. B. Thompson (1952), N. Dalkey (1953), D. Gale (1953), R. Otter-J. J. Dunne (1953), B.J. Birch (1955).
375. Cfr. C. Berge (1953), (1957) e (1957a), D. Gale-F. M. Stewart (1953).

376. I giochi di posizione vengono ideati da J. Milnor (1953) e sviluppati poi da J. R. Isbell (1957), C. Berge (1957) e (1957a), J. Hannan (1957).
377. Cfr. H. Everett (1957).
378. Cfr. L. S. Shapley (1953b) e D. Gillette (1957).
379. Cfr. R. Isaacs (1952) e (1965).
380. Cfr. par. 3.2.
381. I primi modelli di giochi di sopravvivenza si devono a M. Hausner, che nel 1952 scrive sull'argomento una serie di articoli che circolano internamente alla RAND Corporation. Questo strumento viene sviluppato in J. Milnor-L. S. Shapley (1957) ed applicato estesamente all'analisi economica in M. Shubik (1959) e in M. Shubik-G. L. Thompson (1959).
382. Un tipo speciale di questi giochi è rappresentato dai 'games of attrition', impiegati nelle applicazioni di carattere militare. In questa versione, ad ogni ripetizione del gioco corrisponde un trasferimento di ricchezza da un giocatore all'altro determinato sia dalle strategie impiegate che dal caso. Il gioco si chiude con la vincita di uno dei due giocatori quando la ricchezza dell'altro scende sotto un certo livello (cfr. J. R. Isbell-W. H. Marlow, 1956).
383. Cfr. R. J. Aumann (1959).
384. Cfr. D. Fudenberg-J. Tirole (1991), pp. 147-203.
385. "Several universities in the United States and Canada give courses or seminars in game theory in the department of mathematics; yet in spite of the title of the major work, few departments of economics teach game theory, and only the most cursory of asides or footnotes are accorded it in the textbooks" M. Shubik (1953a), p. 21.
386. Nel capitolo finale del suo manuale, intitolato 'Some Open Problems', Mc Kinsey dimostra di essere scettico sulla possibilità che il concetto di equilibrio proposto da Nash nel 1950 apra nuove prospettive per la teoria dei giochi generali a n persone: "It must be remarked that Nash's theory - although it represents a considerable advance - has some serious inadequacies and certainly cannot be regarded as a definitive solution of the conceptual problem of this domain." J. C. C. Mc Kinsey (1952), p. 359.
387. Cfr. D. Blackwell-M. A. Girschick (1954), J. D. Williams (1954).
388. Cfr. I. Kaplansky (1945), L. H. Loomis (1946). Altre dimostrazioni algebriche del teorema del minimax provengono da L. L. Dines (1947), H. Weyl (1950), L. S. Shapley-R. N. Snow (1950), G. B. Dantzig (1956), D. Gale-H. W. Kuhn-A. W. Tucker (1950), che impiegano un teorema ideato dal matematico tedesco Stiemke nel 1915.
389. Cfr. A. Wald (1945a).
390. Cfr. H. F. Bohnenblust-S. Karlin (1950).
391. Cfr. I. L. Glicksberg (1952). Cfr. anche K. Fan (1953), che offre la prima dimostrazione fondata sulla teoria degli insiemi convessi.
392. La prima esposizione di questo metodo di soluzione è contenuta in un paper della RAND Corporation del 1948. Esso viene poi perfezionato in alcune pubblicazioni successive: M. Dresner-L. S. Shapley (1949), M. Dresner (1950), S. Karlin (1950) e D. Gale (1951).
393. Cfr. L. S. Shapley-R.N. Snow (1950) e D. Gale-H. W. Kuhn-A. W. Tucker (1950).
394. Cfr. T. S. Motzkin-H. Raiffa-G. L. Thompson-R. M. Thrall (1953)
395. Cfr. G. B. Dantzig (1951) e (1951a).
396. Cfr. G. W. Brown-J. von Neumann (1950).

397. Cfr. J. Robinson (1951).
398. Cfr. H. Neisser (1952), C. Kaysen (1952), D. Ellsberg (1956), A. Y. C. Koo (1959), D. Ellsberg (1959)
399. La posizione di Neisser sarebbe corretta se gli elementi della matrice fossero pagamenti in denaro, ma in Theory of Games essi sono espressi in termini di utilità e, come tali, è lecito presumere che rappresentino correttamente le preferenze dei giocatori (cfr. A. Y. C. Koo, 1959, pp. 38-39).
400. Cfr. D. Ellsberg (1956), p. 46.
401. "The vital orientation of game theory is implicit in that remark. If we should suppose - as game theorist has in fact proposed - that the game models under consideration all represent uncertainty situations in which an individual is forced, reluctantly, to make decisions, the rationale for the minimax principle becomes immediately far more convincing. The behavior of their 'rational' player may well be described as that of a man whose sole concern is to come out with as little loss as possible. The minimax strategy, to him, is the least ominous choice in a game he would rather not play. His is not the attitude, to be sure, of one playing a game for entertainment or profit. It is, in fact, the psychology of a timid man pressed into a duel." D. Ellsberg (1956), pp. 51-52.
402. Il giudizio di Ellsberg è sintomatico di tutta una serie di contributi che daranno adito a soluzioni alternative ai giochi strettamente competitivi e che animano l'ampio dibattito che si svolge nell'ambito della teoria della decisione negli anni '50, al quale è dedicato un breve cenno nel paragrafo 5.6.
403. Cfr. D. B. Gillies (1959), L. S. Shapley (1959a).
404. Cfr. L. S. Shapley (1953).
405. Cfr. J. F. Nash (1950a).
406. La definizione della soluzione di Nash come 'schema di arbitraggio' dà luogo negli anni '50 alla polemica tra Harsanyi e Wagner, di cui si offre un resoconto nel successivo par. 5.4. La posizione di Nash non sembra però dubbia. Nel 1950, egli scrive: "A 'solution' here means a determination of the amount of satisfaction each individual should expect to get from the situation, or, rather, a determination of how much it should be worth to each of these individuals to have this opportunity to bargain" (cfr. J. F. Nash, 1950a, p. 155). Ancora più chiara è la sua posizione nel 1953: "One states as axioms several properties that it would seem natural for the solution to have and then one discovers that the axioms actually determine the solution uniquely." (J. F. Nash, 1953, p. 129) (le sottolineature non sono comprese nell'originale).
407. Cfr. J. F. Nash (1953).
408. Cfr. H. Raiffa (1953).
409. Cfr. R. B. Braithwaite (1955)
410. Cfr. T. C. Shelling (1958) e (1959), poi ristampati in T. C. Schelling (1960).
411. Una soluzione parziale alla molteplicità degli equilibri di Nash viene offerta solo negli anni '60 attraverso la teoria dei 'raffinamenti' e le 'teorie complete' di Selten.
412. Esemplicativo di questa posizione è il manuale di Mc Kinsey già citato: "It must be remarked that Nash's theory - although it represents a considerable advance - has some serious inadequacies and certainly cannot be regarded as a definitive solution of the conceptual problem of this domain." (cfr. J. C. C. McKinsey, 1952, p. 359).

413. Cfr. I. Glicksberg (1952). Altre dimostrazioni vengono date da G. Debreu (1952) e N. Dalkey (1953)
414. Cfr. H. W. Kuhn (1950), p. 575.
415. Il dilemma del prigioniero viene formulato per la prima volta, intorno al 1950, da uno psicologo sociale Merrill M. Flood e da un economista Melvin Dresher ed è poi formalizzato da Albert W. Tucker. Questo gioco è un caso speciale del 'Problema di Newcomb' che viene ideato da William Newcomb (cfr. R. Campbell-L. Sowden, 1985, pp. 1-41).
416. Cfr. G. L. Thompson (1956), pp. 144-147.
417. Cfr. R. D. Luce-H. Raiffa (1957), pp. 97-102.
418. Cfr. M. Shubik-G. L. Thompson (1959).
419. Cfr. P. Sylos Labini (1956) e F. Modigliani (1958).
420. Relativamente a questi due programmi di ricerca, cfr. H. A. Simon (1955) e (1957), W. J. Baumol (1959).
421. W. Fellner (1949), p. 10.
422. "In fact we do not live in a world of permanent hysteria which threatens to explode all the time." W. Fellner (1949), p. 180.
423. Cfr. J. W. Friedman (1977).
424. W. Fellner (1949), p. 41.
425. "The interesting thing about von Neumann and Morgenstern's treatment of zero-sum two-person games is that expectations about the rival's behavior are largely irrelevant to the problem. This proposition is so revolutionary and so contrary to everything said by duopoly theorists that we shall examine it more closely." H. Brems (1951), p. 166.
426. La posizione di Brems, come nota Martin Shubik (1953), pp. 206-207, è criticabile in base al fatto che egli non tiene conto della metodologia adottata da von Neumann e Morgenstern. Le sue critiche si basano infatti sulla rimozione di alcune delle ipotesi fondamentali di Theory of Games (informazione perfetta e impossibilità di 'scoprire' la strategia dell'avversario) che vengono imposte ai giochi in base allo 'standard of modesty' più volte ricordato.
427. H. Simon (1957), p. 202.
428. R. Dorfman-P. A. Samuelson-R. M. Solow (1958), p. 417.
429. "The theory of many-person games in the hands of von Neumann and Morgenstern is essentially a theory of coalitions, their formation and revision. (...) The problems then become: which coalition will form and how the winnings be divided among the members of the coalition? To pursue the answers proposed for these questions would lead us into a specialized discussion, and since these answers are not very satisfactory we refrain. The upshot of our cursory discussion of general games in that game theory provides convincing solutions of conflict situations only in the two-person constant-sum case. In more general cases the concepts and approach of game theory have provided a convenient and suggestive framework for analysis, but no really satisfactory basis for finding concrete solutions has yet been proposed." R. Dorfman-P. A. Samuelson-R. M. Solow (1958), p. 444.
430. R. Dorfman-P. A. Samuelson-R. M. Solow (1958), p. 445.
431. Nel 1957, Luce e Raiffa scrivono: "we have the historical fact that many social scientists have become disillusioned with game theory. Initially there was a naive band-wagon feeling that game theory solved innumerable problems of sociology and economics, or that, at the least, it made their solution a practical matter of a few

- years' work. This has not turned out to be the case". R. D. Luce-H. Raiffa (1957), p. 10.
432. "this study deals with economic theory under the assumption that the job of the theorist is to search for and examine the invariants or homomorphism of economic systems." M. Shubik (1953), p. 6.
433. Shubik sviluppa l'analisi del duopolio anche in due articoli apparsi su *Econometrica*: il primo, scritto con Mayberry e Nash, si limita ai modelli di competizione basati sulla variazione dei prezzi (cfr. J. P. Mayberry-J. F. Nash-M. Shubik, 1953), il secondo, che pubblica invece da solo, allarga l'analisi alla competizione sulle quantità prodotte (cfr. M. Shubik, 1955).
434. Sulla base di questa analogia Shubik ne formula una seconda, che verrà esclusa dal suo libro del 1959: "we may suspect that the intersection of a market supply curve and a demand curve under pure competition gives rise to the same sort of equilibrium point" M. Shubik (1953), p. 88.
435. "The number of factors which had to be introduced explicitly into the above model of a competitive situation indicate the difficulties involved in any attempt to handle such problems by graphical methods." M. Shubik (1953), p. 215.
436. Secondo Morgenstern, l'opera di Shubik "goes boldly after pivotal problems, some time-honored and associated with the finest names in economics. They are freshly formulated in a game theoretical manner, and the new solutions are carefully compared with earlier answers." Prefazione di Oskar Morgenstern a M. Shubik (1959), p. IX
437. Prefazione di Oskar Morgenstern a M. Shubik (1959), p. IX.
438. Lo studio dei 'survival games' è oggetto di un articolo scritto da Shubik insieme a Gerald L. Thompson e i cui contenuti vengono riproposti in *Strategy and Market Structure* (cfr. M. Shubik-G. L. Thompson, 1959).
439. H. Neisser (1952), p. 244.
440. L'articolo fu pubblicato postumo a cura di Franco Modigliani e Herbert A. Simon: Henderson muore il 23 gennaio 1954 (cfr. A. Henderson, 1954).
441. Cfr. J. Nash (1950a), p. 155.
442. Cfr. T. C. Schelling (1960), p. 21
443. La formazione scientifica di Schelling avviene all'interno della RAND Corporation, per la quale produce negli anni '50 una serie di lavori dedicati agli 'war games' (cfr. T. C. Schelling, 1960, pp. VI-VII).
444. Un'eccezione è contenuta in T. C. Schelling (1960), p. 25, dove Schelling offre una breve modellizzazione di una soluzione 'ideale' al monopolio bilaterale.
445. Cfr. par. 2.6.
446. Le minacce sono possibili se uno o entrambi i contraenti (a) pur traendo un vantaggio dalla contrattazione, non lo considerano sufficiente in base alle loro aspettative, (b) possono infliggere all'avversario un danno 'positivo' e, se inoltre, "the carrying out of threats is enforced by some kind of special authority" J. C. Harsanyi (1956), p. 16.
447. J. C. Harsanyi (1956), p. 10.
448. J. C. Harsanyi (1956), p. 17.
449. Cfr. M. Shubik (1953), p. 76 e M. Shubik (1959), pp. 53-54.
450. M. Shubik (1952), p. 294.
451. Cfr. par. 5.2.
452. Cfr. A. Rapoport (1959), T. C. Schelling (1958), (1959) e (1960).

453. Una rassegna dei contributi di economisti alla teoria della contrattazione è contenuta nella raccolta di O. R. Young (editor) (1957). Il giudizio espresso si basa sui lavori di C. E. Lindblom (1948), J. Pen (1952), (1959) e (1959a), H. M. Wagner (1957), R. L. Bishop (1963) e (1964), J. G. Cross (1965).
454. I due articoli che alimentano questo dibattito sono J. C. Harsanyi (1958) e H. M. Wagner (1958), che fanno seguito ad un articolo di Wagner del 1957 in cui si dimostra che i modelli di Zeuthen e Nash conducono a risultati diversi se non viene assunto nessun accordo e le minacce devono essere attuate. Nel 1959 Jan Pen, un economista che si occupa della teoria della contrattazione, aggiunge un altro contributo al dibattito, sostenendo posizioni vicine a quelle di Wagner (cfr. J. Pen, 1959a).
455. L'autore a cui si deve questa ricostruzione del dibattito tra economisti e teorici dei giochi, Oran R. Young, scrive: "In essence, what Harsanyi has done is to recast Zeuthen's model in such a way as to accentuate its determinate elements and to strip away its ambiguous features." O. R. Young (1975), p. 245.
456. Cfr. J. C. Harsanyi (1967).
457. La ricostruzione storica di questa evoluzione, che esula dagli obiettivi di questo lavoro, è oggetto di un'ampia ed ottima letteratura. E' doveroso ricordare almeno due riferimenti fondamentali: un articolo pubblicato sul *The Journal of Economic Literature* da Weintraub, il libro di Ingrao e Israel sulla 'mano invisibile' (cfr. E. R. Weintraub, 1983; B. Ingrao-G. Israel, 1987) e la discussione matematica contenuta in A. Takayama (1985), cap. 2.
458. Cfr. K. J. Arrow-G. Debreu (1954), p. 273.
459. Cfr. la serrata critica che Werner Hildenbrand rivolge su questo punto al modello di Arrow-Debreu nell'introduzione a W. Hildenbrand-A. Mas-Colell (editors) (1986).
460. Contemporaneamente ad Arrow e Debreu, Lionel McKenzie arriva alle loro stesse conclusioni senza impiegare la teoria dei giochi. Scrive McKenzie nel suo articolo: "Gerard Debreu and Kenneth Arrow have been working, independently, along similar lines. Their method seems closely related to the theory of competitive games developed by John Nash, while my motivation comes directly from the work of Abraham Wald and Tjalling Koopmans." (cfr. L. McKenzie, 1954, p. 147). Anche la sua dimostrazione dell'esistenza di un equilibrio competitivo è però fondata sul teorema del punto fisso di Kakutani, con cui Nash nel 1950 dimostra l'esistenza di un 'punto di equilibrio'.
461. K. J. Arrow (1987a), p. 194.
462. "Il quadro di riferimento di Debreu è la teorizzazione della scuola di Losanna, anche se essa compare sullo sfondo, come insieme di immagini intuitive: e questo come ogni teoria assiomatica che si rispetti. Così il paradigma walrasiano è rinato in una nuova veste: l'Araba Fenice è risorta dalle sue ceneri anche se le sue piume luccicano ora ... di assiomi." B. Ingrao-G. Israel (1987), p. 286.
463. G. Debreu (1959), p. VIII.
464. "Il libro di Debreu segna anche l'affermazione dell'impiego di nuovi strumenti matematici in economia: già nell'introduzione, Debreu sottolinea l'importanza dell'opera di von Neumann and Morgenstern nell'aver 'liberato' l'economia matematica dalle sue tradizioni di analisi differenziale, che tanto peso, nel bene e nel male, avevano avuto nella matematizzazione dell'economia. Di fatto, in *Theory of value* nessuna condizione di derivabilità è imposta

- alle funzioni considerate e le derivate non compaiono mai in tutto il libro: la topologia è il nuovo strumento degli studi che si muovono nell'area della teoria dell'equilibrio economico generale, e il teorema del punto fisso è il cardine cui sono ricollegati assiomi e teoremi." P. Tani (1987), p. 79.
465. Cfr. par. 5.6.
466. L'originaria formulazione del 'core' si trova in due articoli mai pubblicati che circolano all'interno della RAND negli anni '50: D. B. Gillies, *Some Theorems on N-Person Games*, Ph.D. Dissertation, Department of Mathematics, Princeton University, 1953; L. S. Shapley, "Open Questions", in *Report of an Informal Conference on the Theory of N-Person Games*, Princeton University, mimeo, 1953.
467. Shubik rileva un'altra differenza tra i due modelli: "The solution is not identical with that of von Neumann and Morgenstern in as much as side payment in the form of a third commodity or 'utils' is not considered. It is not even necessary to assume that the two players have comparable utilities for the goods being traded" M. Shubik (1959a), p. 268.
468. "This feature emphasizes the difference between the von Neumann and Morgenstern solution and other economic analysis. The cooperative game analysis takes into account all possible coalition structures, thus even though there may be only one undominated imputation in the economy, there will be sets of mutually stalemating imputations which make up possible solutions given the presence of various coalitions." M. Shubik (1959a), p. 277.
469. M. Shubik (1959a), p. 276.
470. M. Shubik (1959a), p. 277.
471. Cfr. A. Schotter-G. Schwödiauer (1980), p. 480.
472. Secondo Schotter e Schwödiauer, la seconda rinascita si ha all'inizio degli anni '70, quando Shubik dimostra che l'equilibrio generale può essere rappresentato come un problema che coinvolge un insieme di agenti isolati 'price-making' e nel quale possono essere introdotti molti altri dettagli istituzionali (sistema creditizio, istituzioni pubbliche, mercati finanziari) (cfr. A. Schotter-G. Schwödiauer, 1980, p. 480).
473. Negli anni '60, la teoria del 'core' viene sviluppata da un ampio numero di articoli, che ne evidenziano le importanti implicazioni (cfr. per una 'review' di questi tentativi, L. S. Shapley-M. Shubik, 1967). La prima dimostrazione del famoso 'limit theorem' è contenuta in G. Debreu-H. Scarf (1963).
474. L'ipotesi (2) nel modello di Kemeny, Thompson e Morgenstern è composta di tre parti: a) il valore totale di tutti i beni prodotti deve essere positivo, b) ogni processo impiega come input almeno qualche output prodotto nel periodo precedente, c) tutti i beni possono essere prodotti nell'economia (non esistono cioè materie prime) (cfr. J. G. Kemeny-O. Morgenstern-G. L. Thompson, 1956, pp. 119-120).
475. Cfr. R. D. Luce-H. Raiffa (1957), p. 13.
476. Cfr. par. 4.2.
477. Howard Raiffa sostiene nel 1987 che il lavoro di Nash viene influenzato da Arrow: "Nash must have also been influenced by Arrow, because a key axiom in his development was an independence of irrelevant alternative condition" H. Raiffa (1987), p. 673. Ma Arrow non si dimostra dello stesso avviso. Riferendosi a Nash, egli scrive: "I am sure that he did pick up the phrase 'independence of irrelevant alternatives' from me since my work on social choice had been distributed as a Rand report in the fall of 1948 and was

- available to Nash... However, I think he read my work somewhat carelessly, because his use of the phrase really differs from mine (his refers to variations in the set of opportunities, mine to variations in the preference orderings). The two uses are easy to confuse." K. J. Arrow (1987a), p. 195.
478. K. J. Arrow (1987a), p. 193.
479. K. J. Arrow (1951b), p. 59.
480. Nella seguente citazione non è difficile scorgere un'anticipazione della moderna 'critica di Lucas' all'inefficacia della politica economica: "The aspects not discussed may be conveniently described as the game aspects, especially since that term has acquired a double meaning. In the first place, no consideration is given to the enjoyment of the decision process as a form of play. There is no need to stress the obvious importance of the desire to play and win the game as such in both economic behavior and political." K. J. Arrow (1951b), pp. 6-7.
481. Nella successiva evoluzione della teoria dei giochi, questo problema è oggetto della letteratura sul 'mechanism design', avviata negli anni '60 da Leonid Hurwicz (1960), e delle moderne teorie di informazione asimmetrica. Un'accurata sintesi storica di questi sviluppi viene presentata in A. Schotter-G. Schwödiauer (1980).
482. "The other meaning of the term 'game' is that which has been brought to the attention of economists by Professors von Neumann and Morgenstern. The point here, broadly speaking, is that, once a machinery for making social choices from individual tastes is established, individuals will find it profitable, from a rational point of view, to misrepresent their tastes by their actions, either because such misrepresentation is somehow directly profitable or, more usually, because some other individual will be made so much better off by the first individual's misrepresentation that he could compensate the first individual in such a way that both are better off than if everyone really acted in direct accordance with his tastes. (...) Even in a case where it is possible to construct a procedure showing how to aggregate individual tastes into a consistent social preference pattern, there still remains the problem of devising rules of the game so that individuals will actually express their true tastes even when they are acting rationally." K. J. Arrow (1951b), p. 7.
483. Cfr., rispettivamente, A. Wald (1945) e (1947a).
484. Cfr., per esempio, K. J. Arrow (1951).
485. Cfr. J. Savage (1954), cap. 10.
486. Cfr. L. Hurwicz (1955).
487. Cfr. H. Chernoff (1949).
488. Cfr. G. L. S. Shackle (1949).
489. Cfr. M. Shubik (1953), pp. 162-165 e (1959), pp. 172-178.
490. R. Dorfman-P. A. Samuelson-R. M. Solow (1958), p. 5.
491. L'altro autore che anticipa la programmazione lineare è Kantorovich, che nel 1939 e nel 1942 (cfr. T. C. Koopmans, 1957, p. 92), ma la sua teoria matematica anticipa quella di Dantzig, senza influenzarla direttamente.
492. Cfr. H. W. Kuhn-A. W. Tucker (1958), p. 117.
493. Cfr. G. B. Dantzig (1951) e (1951b).
494. Cfr. R. M. Thrall-C. H. Coombs-R. L. Davis (editors) (1954).
495. Negli anni '60, le idee di Simon ottengono una conferma sperimentale dal lavoro di Siegel e Fouraker, che contribuisce a

- fondare la moderna 'experimental economics' (cfr. V. L. Smith, 1990, pp. 2-3).
496. I concetti di soluzione presentati sono il 'punto di equilibrio di Nash, il valore di Shapley, la 'solution' di von Neumann e Morgenstern, il 'core' di Gillies ed uno schema di arbitraggio - il 'reasonable outcomes' - proposto da John Milnor.
497. Traendo le conclusioni, gli autori del paper scrivono: "Although it is clear that the results do not coincide exactly with any present theory, it is a question how much the outcome was influenced by the experimental technique" G. Kalisch-J. W. Milnor-J. Nash-E. D. Nering (1954), p. 268.
498. Per esempio, la posizione dei giocatori intorno ad un tavolo rivela un'importanza insospettata.
499. Cfr. M. M. Flood (1958), J. L. Loomis (1959), A. Scodel-J. S. Minas-P. Ratoosh-M. Lipetz (1959), M. Deutsch (1958).
500. Cfr. W. E. Vinacke-A. Arkoff (1957).
501. Cfr. M. M. Flood (1955); F. Mosteller-P. Noguee (1951).
502. Cfr. J. J. Stone (1958).
503. Cfr. T. C. Schelling (1958) e (1960).
504. La nascita della 'experimental economics' si deve negli anni '60 al lavoro di Vernon Smith, che cerca di dimostrare sperimentalmente la teoria dell'equilibrio competitivo, ed a quello di Siegel e Fouraker, che sottopongono a test il modello di contrattazione di Edgeworth e quello di Nash-Harsanyi (cfr. V. L. Smith, 1990; M. Shubik, 1988).
505. V. L. Smith (1990), p. 4.
506. Cfr. R. Bellman-C. E. Clark-D. G. Malcom-C. J. Craft-F. M. Ricciardi (1957).
507. Cfr. F. M. Ricciardi (1957); G. R. Andlinger (1958); A. C. Hoggatt (1959).